Sur les Fonctions Abéliennes.

PAR H. POINCARÉ.

---

§ 1. *Réduction des Intégrales.*

J'ai donné dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (tome 12, page 124) une démonstration et une généralisation de deux théorèmes de M. Weierstrass. Je veux d'abord rappeler ici succinctement, en y ajoutant quelques compléments, ce qu'il y a d'essentiel dans cette démonstration.

Soient $J_1, J_2, \ldots, J_\rho$, ρ intégrales abéliennes de rang ρ.

Soit
$$x_1, x_2, \ldots, x_\rho;\ x_1', x_2', \ldots, x_\rho'$$
un système de périodes normales de J_1;
$$y_1, y_2, \ldots, y_\rho;\ y_1', y_2', \ldots, y_\rho'$$
les périodes correspondantes de J_2;

. . . .

$$t_1, t_2, \ldots, t_\rho;\ t_1', t_2', \ldots, t_\rho'$$
les périodes correspondantes de J_μ;

. . . .

et enfin
$$u_1, u_2, \ldots, u_\rho;\ u_1', u_2', \ldots, u_\rho'$$
celles de J_ρ.

De telle façon que l'on ait:
$$x_1y_1' - x_1'y_1 + x_2y_2' - x_2'y_2 + \ldots + x_\rho y_\rho' - x_\rho' y_\rho = 0$$
et $\frac{\rho(\rho-1)}{2} - 1$ autres relations de même forme.

Imaginons maintenant que l'on puisse trouver $2\mu^2$ nombres:
$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu},$$
$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2\mu},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2\mu}$$

tels que les périodes de l'intégrale J_1 puissent se mettre sous la forme suivante:

$$x_i = \Sigma_k \alpha_{ik} \xi_k; \; x'_i = \Sigma_k \alpha'_{ik} \xi_k$$

les $4\mu\rho$ nombres α_{ik} et α'_{ik} étant tous entiers.

Supposons que l'on ait de même pour les périodes de l'intégrale J_2:

$$y_1 = \Sigma \alpha_{ik} \eta_k; \; y'_i = \Sigma \alpha'_{ik} \eta_k$$

(les nombres α_{ik} et α'_{ik} conservant les mêmes valeurs que plus haut) qu'il en soit de même pour les périodes des intégrales suivantes $J_3 \ldots.$ et qu'enfin pour les périodes de l'intégrale J_μ on ait:

$$t_i = \Sigma \alpha_{ik} \tau_k; \; t'_i = \Sigma \alpha'_{ik} \tau_k.$$

Nous dirons alors que les μ intégrales $J_1, J_2, \ldots., J_\mu$ sont réductibles au genre μ.

Nous formerons le tableau des $4\mu\rho$ nombres entiers:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1.1} & \alpha'_{1.1} & \alpha_{2.1} & \alpha'_{2.1} & \ldots. & \alpha_{\rho.1} & \alpha'_{\rho.1} \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & \alpha'_{2.2} & \ldots. & \alpha_{\rho.2} & \alpha'_{\rho.2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1.2\mu} & \alpha'_{1.2\mu} & \alpha_{2.2\mu} & \alpha'_{2.2\mu} & \ldots. & \alpha_{\rho.2\mu} & \alpha'_{\rho.2\mu} \end{vmatrix}.$$

Le problème que nous nous proposons est de réduire ce tableau à sa plus simple expression.

Voici comment cette réduction peut se faire:

1°. Au lieu d'envisager un système de périodes normales

$$x_1, x_2, \ldots., x_\rho; \; x'_1, x'_2, \ldots., x'_\rho$$

de l'intégrale J_1 et les périodes correspondantes des autres intégrales, on aurait pu envisager un *autre* système de périodes normales de J_1.

Par exemple:

$$x_1 + x'_1, x_2, \ldots., x_\rho; \qquad x'_1, x'_2, \ldots., x'_\rho$$

ou bien $\quad -x_1, x_2, \ldots., x_\rho; \quad -x'_1, x'_2, \ldots., x'_\rho$

ou bien $\quad -x'_1, x_2, \ldots., x_\rho; \quad x_1, x'_2, \ldots., x'_\rho$

formeront encore trois systèmes de périodes normales de J_1.

Il sera donc permis:

Ou bien d'ajouter dans le tableau (1) aux termes d'une colonne de rang impair, les termes correspondants de la colonne de rang pair qui la suit (nous dirons pour abréger que ces deux colonnes appartiennent à la même paire).

Ou bien de changer de signe tous les termes des deux colonnes d'une même paire.

Ou bien de permuter deux colonnes d'une même paire en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Plus généralement on peut faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération A_j et qui n'est qu'une combinaison de celles dont nous venons de parler:

Remplacer les nombres α_{ik} et α'_{ik} par les nombres entiers β_{ik} et β'_{ik} définis comme il suit:

$$\beta_{ik} = a_i\alpha_{ik} + b_i\alpha'_{ik}\,;\ \beta'_{ik} = c_i\alpha_{ik} + d_i\alpha'_{ik}$$

où $(a_1, b_1, c_1, d_1),\ (a_2, b_2, c_2, d_2), \ldots\ldots, (a_\rho, b_\rho, c_\rho, d_\rho)$

sont 4ρ nombres entiers satisfaisant aux ρ conditions

$$a_id_i - b_ic_i = 1.$$

De même les périodes

$$-x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_\rho\,;\ -x'_2, x'_1, x'_3, x'_4, \ldots\ldots, x'_\rho$$

ou bien $x'_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_\rho\,;\quad x'_1, x'_2 - x'_1, x'_3, \ldots\ldots, x'_\rho$

sont encore des périodes normales.

Il est donc permis:

Ou bien de permuter deux paires de colonnes en changeant tous les signes de l'une d'entre elles.

Ou bien d'ajouter la première colonne d'une paire π à la première colonne d'une autre paire π' et de retrancher en même temps la deuxième colonne de la paire π' de la deuxième colonne de la paire π.

Plus généralement on peut faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération B:

Remplacer les nombres α_{ik} et α'_{ik} par les nombres β_{ik} et β'_{ik} définis comme il suit:

$$\beta_{ik} = \Sigma_j a_{ij}\alpha_{jk}\,;\ \beta'_{ik} = \Sigma_j b_{ij}\alpha'_{jk}$$

les a_{ij} et les b_{ij} étant des nombres entiers satisfaisant aux conditions suivantes: le déterminant des a_{ij} est égal à 1 de même que celui des b_{ij}; de plus on a:

$$\Sigma_i a_{ij}b_{ik} = 0 \text{ si } j \gtrless k$$

et

$$\Sigma_i a_{ij}b_{ij} = 1$$

de telle sorte que les deux substitutions linéaires définies, la première par les ρ^2 nombres a_{ij}, la seconde par les ρ^2 nombres b_{ij} soient deux substitutions corrélatives.

2°. Posons maintenant: $\xi'_k = \Sigma a_{ik}\xi_i$

les a_{ik} étant des coëfficients entiers dont le déterminant est égal à 1. Supposons de plus que les quantités $\eta'_k, \ldots\ldots, \tau'_k$

soient formées à l'aide des $\eta, \ldots\ldots$ et des τ comme les ξ' sont formés avec les ξ.

Par hypothèse les périodes de l'intégrale J_1 sont des combinaisons linéaires à coëfficients entiers des quantités ξ et les périodes des intégrales $J_2, \ldots, J_\mu$ seront formées avec les quantités $\eta, \ldots, \tau$ comme celles de J_1 avec les quantités ξ.

De même (et cela se voit sans peine), les périodes de l'intégrale J_1 seront des combinaisons lineáires à coëfficients entiers des quantités ξ' et les périodes des intégrales $J_2, \ldots, J_\mu$ seront formées avec les quantités $\eta', \ldots, \tau'$ comme celles de J_1 avec les quantités ξ'.

Il est donc permis de faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération C:

Remplacer les nombres α_{ik} et α'_{ik} par les nombres β_{ik} et β'_{ik} définis comme il suit:

$$\beta_{ik} = \Sigma_j a_{jk}\alpha_{ij}\,;\ \beta'_{ik} = \Sigma_j a_{jk}\alpha'_{ij}$$

les coëfficients a_{jk} étant $4\mu^2$ nombres entiers dont le déterminant est égal à 1.

On peut en particulier permuter deux lignes du tableau (1) en changeant tous les signes de l'une d'elles, ou bien ajouter une ligne à une autre.

En d'autres termes, on conserve le même système de périodes normales, mais on remplace le système des quantités ξ auxquelles ces périodes peuvent se réduire par un système équivalent.

Le problème que je me propose est de réduire le tableau (1) à sa plus simple expression par le moyen des opérations A, B et C.

Envisageons d'abord le cas où $\mu = 1$, c'est à dire où l'intégrale J_1 est réductible aux intégrales elliptiques. Nous supposerons de plus, mais seulement pour fixer les idées, $\rho = 3$.

Le tableau (1) s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1.1} & \alpha'_{1.1} & \alpha_{2.1} & \alpha'_{2.1} & \alpha_{3.1} & \alpha'_{3.1} \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & \alpha'_{2.2} & \alpha_{3.2} & \alpha'_{3.2} \end{vmatrix}.$$

Il est clair que les opérations A, B, C, appliquées au tableau précédent ne changeront: ni la quantité

$$(2)\qquad \alpha_{1.1}\alpha'_{1.2} - \alpha_{1.2}\alpha'_{1.1} + \alpha_{2.1}\alpha'_{2.2} - \alpha_{2.2}\alpha'_{2.1} + \alpha_{3.1}\alpha'_{3.2} - \alpha_{3.2}\alpha'_{3.1}$$

ni le plus grand commun diviseur des termes de la première ligne, ni celui des termes de la deuxième ligne, ni celui des déterminants formés avec deux des colonnes du tableau.

Cela posé:

1°. On peut, par l'opération A, annuler $\alpha'_{1.1}, \alpha'_{2.1}, \alpha'_{3.1}$. Il est donc toujours permis de supposer que le tableau (1) s'écrit:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1.1} & 0 & \alpha_{2.1} & 0 & \alpha_{3.1} & 0 \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & \alpha'_{2.2} & \alpha_{3.2} & \alpha'_{3.2} \end{vmatrix}.$$

2°. Appliquons maintenant l'opération B. Les nombres $\alpha'_{1.1}$, $\alpha'_{2.1}$, $\alpha'_{3.1}$ ne cesseront pas d'être nuls; mais nous pourrons nous servir de cette opération de façon à annuler $\alpha_{2.1}$ et $\alpha_{3.1}$. Il arrivera alors que $\alpha_{1.1}$ sera le seul terme de la première ligne qui ne sera pas nul; je puis toujours le supposer égal à 1 ; car s'il ne l'était pas on pourrait remplacer la période ξ_1 par son multiple $\alpha_{1.1}\xi_1$ et $\alpha_{1.1}$ deviendrait ainsi égal à 1. Il est donc toujours permis de supposer que le tableau (1) s'écrit:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & \alpha'_{2.2} & \alpha_{3.2} & \alpha'_{3.2} \end{vmatrix}.$$

3°. Appliquons de nouveau l'opération A, mais sans toucher à la première paire de colonnes; les termes déjà annulés resteront nuls. Mais nous pourrons diriger l'opération de façon à annuler $\alpha'_{2.2}$ et $\alpha'_{3.2}$. Le tableau deviendra:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & 0 & \alpha_{3.2} & 0 \end{vmatrix}.$$

4°. Appliquons l'opération B sans toucher à la première paire de colonnes; les termes déjà annulés resteront nuls, et nous pourrons diriger l'opération de façon à annuler $\alpha_{3.2}$.

Le tableau (1) s'écrira alors, en remplaçant les lettres α pourvues d'indices par de simples lettres a, b, c, etc.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5°. Appliquons maintenant l'opération C en retranchant a fois la 1ère ligne de la seconde; le tableau se simplifie encore et s'écrit:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On est ainsi conduit au théorème de M. Weierstrass que j'ai démontré et généralisé dans la note citée plus haut.

Mais la simplification peut être encore poussée plus loin ainsi que M. Picard l'a montré dans le cas de $\rho = 2$.

Le nombre b (que je puis toujours regarder comme premier avec c) est une constante absolue à laquelle je ne puis toucher, car ce n'est autre chose que l'invariant (2). Mais je vais montrer que je puis en dirigeant convenablement les opérations rendre c égal à tel nombre entier (premier avec b) que je voudrai et en particulier à 1.

Je puis en combinant les opérations A et B, ajouter α fois la $2^{\text{ème}}$ colonne à la troisième en ajoutant α fois la $4^{\text{ème}}$ colonne à la première. Le tableau devient:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c+\alpha b & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Je puis de même ajouter β fois la $2^{\text{ème}}$ colonne à la quatrième en retranchant β fois la $3^{\text{ème}}$ colonne de la première; il vient alors:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta c-\alpha\beta b & b & c+\alpha b & \beta b & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Je puis toujours choisir les nombres entiers α et β de telle sorte que le plus grand commun diviseur de:

$$c+\alpha b \text{ et de } \beta b$$

soit tel nombre d (premier avec b) que je voudrai.

Appliquons ensuite l'opération A sans toucher à la première paire de colonnes, mais de façon à annuler le $4^{\text{ème}}$ terme de la 2de ligne; il vient:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta e-\alpha\beta b & b & d & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

on en ajoutant $\beta c+\alpha\beta b$ fois la $1^{\text{ère}}$ ligne à la $2^{\text{ème}}$:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

d'où il suit que la forme la plus simple du tableau (1) est la suivante:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Nous allons maintenant passer au cas général.

Voyons d'abord quels sont les invariants que les opérations A, B et C laisseront inaltérés.

Il y a en premier lieu le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en prenant 2μ colonnes dans le tableau (1). Je pourrai toujours supposer que ce commun diviseur est égal à 1.

En effet l'opération C permet de remplacer le système des périodes ξ par un système équivalent. Mais il peut arriver dans certains cas qu'on puisse remplacer ce système par un autre, non pas équivalent mais plus simple.

Si par exemple on avait (en faisant pour plus de simplicité $\rho=2$, $\mu=1$):

$$x_1=2\xi_1,\ x_1'=b\xi_2,\ x_2=\xi_2,\ x_3=0,$$

il serait plus simple de poser $2\xi_1=\xi_1'$ et de considérer le système des périodes ξ_1' et ξ_2; c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà fait une fois.

Si donc les déterminants définis plus haut n'étaient pas premiers entre eux, il serait possible de remplacer les périodes ξ par un autre système plus simple et on réduirait ainsi à l'unité le plus grand commun diviseur en question.

Cela posé, les $\mu(2\mu-1)$ quantités:

$$\Phi_{kq}=\Sigma_i\,(\alpha_{ik}\alpha'_{iq}-\alpha_{iq}\alpha'_{ik})$$

ne sont pas altérées par les opérations A et B.

La forme bilinéaire

$$F=\Sigma_{kq}\Phi_{kq}\xi_k\eta_q$$

(où l'on donne à k et à q les valeurs $1, 2, \ldots, 2\mu$ en observant que

$$\Phi_{kq}=-\Phi_{qk},\ \Phi_{qq}=0)$$

ne sera donc pas altérée par les opérations A et B.

On voit sans peine que l'opération C change cette forme en une autre équivalente, au sens arithmétique du mot.

Soit Δ^2 le déterminant des nombres Φ_{kq} (qui est évidemment un carré parfait); ce sera un premier invariant de la forme F.

Nous allons chercher à réduire cette forme bilinéaire F à sa plus simple expression par une transformation linéaire convenablement choisie.

Si Δ n'est pas nul, la forme F pourra être réduite ainsi qu'il suit:

$$F=\Sigma_k A_k(\xi_{2k-1})\,\eta_{2k}-(\xi_{2k}\eta_{2k-1})$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ sont μ nombres entiers tel que:

$$A_1A_2A_3\ldots A_\mu=\Delta.$$

Il suffit pour s'en assurer de répéter presque sans y rien changer le raisonnement de M. M. Clebsch et Jordan (Theorie der Abelschen Functionen, p. 103).

Il en sera encore de même si Δ est nul; seulement un ou plusieurs des nombres A_k seraient nuls.

Mais on peut pousser plus loin encore la réduction. Supposons pour fixer les idées $\mu=3$, et imaginons (en supposant Δ différent de 0) que la forme F soit réduite ainsi qu'il suit:

$$A_1(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+A_2(\xi_3\eta_4-\xi_4\eta_3)+A_3(\xi_5\eta_6-\xi_6\eta_5).$$

Soit A le plus grand commun diviseur des trois nombres A_1, A_2, A_3; soit A_2B celui des trois produits A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3; soit enfin:

$$A_1A_2A_3=A^3B^2C=\Delta$$

la forme F peut être réduite encore ainsi qu'il suit:

$$A(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+AB(\xi_3\eta_4-\xi_4\eta_3)+ABC(\xi_5\eta_6-\xi_6\eta_5).$$

Ceci nous fait voir quels sont, outre Δ les invariants de la forme F.

Soit Δ_i le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre i du déterminant Δ^2; ce sera un invariant, et la forme F n'en aura pas d'autres; il suffira d'ailleurs d'envisager les mineurs d'ordre impair.

Observons maintenant que les $2\mu^2$ quantités $\xi, \eta, \ldots\ldots, \tau$ ne peuvent être choisies arbitrairement. Envisageons en effet la forme bilinéaire:

$$\Sigma_i\,(x_i y_i' - x_i' y_i).$$

Si on y substitue de la place de x_i ou de x_i':

$$a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i + \ldots\ldots + a_\mu t_i,$$
$$a_1 x_i' + a_2 y_i' + a_3 z_i' + \ldots\ldots + a_\mu t_i'$$

et en même temps à la place de y_i ou de y_i':

$$b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 z_i + \ldots\ldots + b_\mu t_i,$$
$$b_1 x_i' + b_2 y_i' + b_3 z_i' + \ldots\ldots + b_\mu t_i'$$

les a et les b étant 2μ nombres tout à fait quelconques, le résultat de la substitution devra être nul.

Si on substitue à la place de x_i ou de x_i' les parties réelles de

$$a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i + \ldots\ldots + a_\mu t_i,$$
$$a_1 x_i' + a_2 y_i' + a_3 z_i' + \ldots\ldots + a_\mu t_i'$$

et à la place de y_i ou de y_i' les parties imaginaires des mêmes quantités, le résultat de la substitution devra être positif.

Reprenons donc la forme

$$F(\xi_k, \eta_k) = \Sigma \Phi_{kq} \xi_k \eta_q.$$

Nous devrons avoir:

$$F(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots\ldots + a_\mu\tau_k,\ b_1\xi_k + b_2\eta_k + \ldots\ldots + b_\mu\tau_k) = 0,$$
$$F[R(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots\ldots + a_\mu\tau_k),\ I(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots\ldots + a_\mu\tau_k)] > 0$$

quelles que soient les quantités a et b.

Nous désignons pour abréger $R(u)$ et $I(u)$ les parties réelle et imaginaire de u.

Nous pouvons toujours supposer que la forme F est réduite. Nous l'écrirons donc en supposant $\mu = 3$ pour fixer les idées:

$$F(\xi_k, \eta_k) = A_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_2(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + A_3(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5).$$

Je dis que les trois nombres A_1, A_2, A_3 sont différents de 0. Supposons en effet que A_3 par exemple soit nul. On pourrait choisir alors les nombres a_1, a_2 et a_3 de telle sorte que:

$$\arg(a_1\xi_1 + a_2\eta_1 + a_3\tau_1) = \arg(a_1\xi_2 + a_2\eta_2 + a_3\tau_2)$$
$$\arg(a_1\xi_3 + a_2\eta_3 + a_3\tau_3) = \arg(a_1\xi_4 + a_2\eta_4 + a_3\tau_4).$$

Ces deux conditions jointes à $A_3 = 0$ entraineraient

$$F[R(a_1\xi_k + a_2\eta_k + a_3\tau_k),\ R^I(a_1\xi_k + a_2\eta_k + a_3\tau_k)] = 0$$

ce qui serait contraire à l'inégalité démontrée plus haut. *Donc Δ ne peut jamais être nul.*

Cela posé, on voit sans peine que l'on a entre les ξ, les η et les τ la relation :

$$A_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_2(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + A_3(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5) = 0$$

et les deux relations analogues.

Cette démonstration se trouve dans une note que nous avons publiée, M. Picard et moi, dans le tome 97 des Comptes Rendus. Dans cette note nous avons établi que toute fonction analytique de n variables et à $2n$ périodes peut s'exprimer à l'aide des fonctions Θ. Mais je ne reproduis ici que la portion de la démonstration qui est utile pour mon objet actuel.

Revenons maintenant au problème de la réduction du tableau (1) et supposons pour fixer les idées, $\mu = 2$, $\rho = 4$.

Nous commencerons au moyen de l'opération C par réduire la forme F à sa plus simple expression. Nous écrirons donc:

$$F = a(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1) + ab(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)$$

a et b étant deux entiers différents de 0; cela est toujours possible d'après ce qui précède.

Nous avons vu en traitant le cas particulier de $\mu = 1$, qu'on peut par les opérations A et B faire disparaître tous les termes de la 1ère ligne du tableau (1), sauf le premier; qu'on peut ensuite par les opérations A et B, et en ayant soin de ne pas toucher à la première paire, faire disparaître tous les termes de la 2de ligne sauf les trois premiers. Nous opérerons de même ici et nous ferons disparaître tous termes, sauf le 1er de la 1ère ligne, les trois premiers de la 2de, les cinq premiers de la 3ème et les sept premiers de la 4ème.

Le tableau (1) s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.3} & \alpha'_{1.3} & \alpha_{2.3} & \alpha'_{2.3} & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.4} & \alpha'_{1.4} & \alpha_{2.4} & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{3.4} & \alpha_{4.4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous n'avons employé que les opérations A et B; la forme F n'a donc pas changé et l'on a encore :

$$F = a(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1) + ab(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2).$$

On a donc :

$$\Phi_{1.2} = \alpha'_{1.2} = 0, \qquad \Phi_{1.3} = \alpha'_{1.3} = 0,$$
$$\Phi_{1.4} = \alpha'_{1.4} = a, \qquad \Phi_{2.3} = \alpha_{2.2}\alpha'_{2.3} = ab.$$

De plus $\alpha_{2.2}$ doit être égal à 1 sans quoi le plus grand commun diviseur des déterminants formés avec 4 colonnes du tableau (1) ne serait pas égal à 1.

Le tableau (1) peut donc s'écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.3} & 0 & \alpha_{2.3} & ab & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1.4} & a & \alpha_{2.4} & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{3.4} & \alpha_{4.4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Retranchons maintenant la $1^{\text{ère}}$ ligne, $\alpha_{1.2}$ fois de la 2de, $\alpha_{1.3}$ fois de la $3^{\text{ème}}$, $\alpha_{1.4}$ fois de la $4^{\text{ème}}$; puis la 2de ligne $\alpha_{2.3}$ fois de la $3^{\text{ème}}$ et $\alpha_{2.4}$ fois de la $4^{\text{ème}}$, le tableau (1) deviendra :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{3.4} & \alpha_{4.4} & 0 \end{vmatrix}. \tag{1^{bis}}$$

Ici deux cas sont à distinguer suivant que a est égal à 1 ou n'est pas égal à 1. Supposons d'abord $a = 1$.

Retranchons la deuxième colonne $\alpha'_{2.4}$ fois de la $4^{\text{ème}}$ et ajoutons en même temps la troisième colonne $\alpha'_{2.4}$ fois à la $1^{\text{ère}}$ (opération B).

Retranchons $\alpha_{3.4}$ fois la 2de colonne de la $5^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ de la $1^{\text{ère}}$ (opérations A et B).

Retranchons enfin $\alpha_{4.4}$ fois la 2de colonne de la $7^{\text{ème}}$ et la $8^{\text{ème}}$ de la $1^{\text{ère}}$.

Le tableau 1 devient alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'_{2.4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha'_{3.4}\alpha_{3.4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut ensuite en retranchant la $1^{\text{ère}}$ ligne un nombre convenable de fois de la 2de et de la $4^{\text{ème}}$, amener le tableau (1) à la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin une dernière simplification est encore possible. Les nombres b et $\alpha_{3.3}$ sont premiers entre eux, et on peut en opérant comme nous l'avons fait dans le cas particulier de $\mu = 1$, réduire $\alpha_{3.3}$ à l'unité.

Le tableau (1) est alors amené à sa forme définitive :

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|.$$

Supposons maintenant que a ne soit pas égal à 1 et reprenons le tableau (1) sous sa forme (1bis).

Il est clair que ab et $\alpha_{3.3}$ sont premiers entre eux; on pourra donc, en opérant comme nous l'avons fait dans le cas particulier de $\mu = 1$, réduire $\alpha_{3.3}$ à l'unité.

Comme nous avons appliqué plusieurs fois l'opération C, la forme F a été changée en une autre forme équivalente, mais *elle a dû rester divisible par* a. Donc $\Phi_{2.4} = \alpha'_{2.4}$ et $\Phi_{3.4} = \alpha'_{3.4}$ (puisque $\alpha_{3.3} = 1$) doivent être divisibles par a. Soit donc:

$$\alpha'_{2.4} = ac, \qquad \alpha'_{3.4} = ad.$$

Nous retrancherons ensuite la $3^{\text{ème}}$ ligne $\alpha_{3.4}$ fois de la $4^{\text{ème}}$ et le tableau (1bis) deviendra:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & ac' & 0 & ad & \alpha_{4.4} & 0 \end{matrix}\right|,$$

où $c' = c - b\alpha_{3.4}$.

Retranchons maintenant c' fois la 2de colonne de la $4^{\text{ème}}$ en ajoutant c' fois la $3^{\text{ème}}$ à la $1^{\text{ère}}$.

Retranchons d fois la 2de de la $6^{\text{ème}}$ en ajoutant d fois la $5^{\text{ème}}$ à la $1^{\text{ère}}$.

Nous avons introduit ainsi dans la $1^{\text{ère}}$ colonne le terme c' à la seconde ligne et le terme d à la $3^{\text{ème}}$; nous les ferons disparaître en retranchant c' fois la $1^{\text{ère}}$ ligne de la 2de et d fois de la $3^{\text{ème}}$. Le tableau (1) deviendra alors:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{4.4} & 0 \end{matrix}\right|.$$

Enfin une dernière simplification est encore possible; il est clair que a et $\alpha_{4.4}$ sont premiers entre eux; nous pouvons donc opérer comme nous l'avons fait dans le cas de $\mu = 1$ et comme nous l'avons fait deux fois dans le cas actuel et réduire $\alpha_{4.4}$ à l'unité. Le tableau (1) prendra alors sa forme définitive:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut généraliser; j'écrirai le tableau (1) réduit à sa plus simple expression en supposant $\rho = 6$, $\mu = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & abc & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il reste maintenant à écrire le tableau des périodes sous la forme habituelle; nous le ferons dans les quatre cas que nous avons choisis plus haut pour exemples, c'est à dire quand:

$$\mu = 1,\ \rho = 3,$$
$$\mu = 2,\ \rho = 4,\ a = 1,$$
$$\mu = 2,\ \rho = 4,\ a > 1,$$
$$\mu = 3,\ \rho = 6,\ a > 1.$$

Nous supposerons que le tableau (1) a été réduit à sa plus simple expression comme il a été dit plus haut, et nous ferons:

Dans le premier cas:
$$\xi_2 = \frac{1}{b}.$$

Dans le second cas:
$$\xi_4 = 1,\ \xi_3 = 0;\ \eta_4 = 0,\ \eta_3 = \frac{1}{b}.$$

Dans le troisième cas:
$$\xi_4 = \frac{1}{a},\ \xi_3 = 0;\ \eta_4 = 0,\ \eta_3 = \frac{1}{ab}.$$

Enfin dans le quatrième:
$$\xi_6 = \frac{1}{a},\ \xi_5 = 0,\ \xi_4 = 0,$$
$$\eta_6 = 0,\ \eta_5 = \frac{1}{ab},\ \eta_4 = 0,$$
$$\tau_6 = 0,\ \tau_5 = 0,\ \tau_4 = \frac{1}{abc}.$$

Cela est toujours possible en choisissant convenablement les intégrales J_1, $J_2, \ldots, J_\mu$.

Il résulte de là et de la forme du tableau (1) que les périodes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\rho$ de J_1 sont toutes égales à 0, excepté une qui est égale à 1. De même des périodes correspondantes de $J_2, \ldots, J_\mu$. En d'autres termes, $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ sont des *intégrales normales*. On y adjoindra $\rho - \mu$ autres intégrales normales et on écrira le tableau des périodes sous la forme habituelle, c'est à dire dans l'ordre suivant:

$$\begin{matrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_\rho, x_1, x_2, \ldots, x_\rho \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_\rho, y_1, y_2, \ldots, y_\rho \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u'_1, u'_2, \ldots, u'_\rho, u_1, u_2, \ldots, u_\rho. \end{matrix}$$

On obtiendra ainsi les tableaux suivants:

1[er] Cas. $\mu = 1, \rho = 3$,

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \xi_1 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H & G'. \end{matrix}$$

2[ème] Cas. $\mu = 2, \rho = 4, a = 1$,

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & G & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H & G'. \end{matrix}$$

3[ème] Cas. $\mu = 2, \rho = 4, a > 1$,

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \frac{1}{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & G & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & H & G'. \end{matrix}$$

4ème Cas. $\mu = 3$, $\rho = 6$, $a > 1$,

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \frac{1}{abc} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{abc} & G & H'' & H' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & H'' & G' & H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & H' & H & G'',
\end{array}$$

a, b, et c sont des entiers; il est clair d'ailleurs qu'on doit avoir:

$$\xi_2 = \eta_1,\ \xi_3 = \tau_1,\ \eta_3 = \tau_2.$$

L'inspection de ces tableaux montre que s'il y a μ intégrales réductibles au rang μ, il y en aura $\rho - \mu$ réductibles au rang $\rho - \mu$.

§ 2. *Cas singuliers de réduction.*

Nous allons désormais nous restreindre au cas où une ou plusieurs des intégrales abéliennes considérées sont réductibles aux intégrales elliptiques.

Soient J_1 et J_2 deux intégrales abéliennes réductibles aux intégrales elliptiques. Soient:

$$x_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2,\ x_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2,\ \ldots\ldots,\ x_\rho = \alpha_\rho\xi_1 + \beta_\rho\xi_2,$$
$$x'_1 = \alpha'_1\xi_1 + \beta'_1\xi_2,\ x'_2 = \alpha'_2\xi_1 + \beta'_2\xi_2,\ \ldots\ldots,\ x'_\rho = \alpha'_\rho\xi_1 + \beta'_\rho\xi_2,$$

les périodes normales de J_1 et

$$y_1 = \gamma_1\eta_1 + \delta_2\eta_2,\ \ldots\ldots,\ y_\rho = \gamma_\rho\eta_1 + \delta_\rho\eta_2,$$
$$y'_1 = \gamma'_1\eta_1 + \delta'_1\eta_2,\ \ldots\ldots,\ y'_\rho = \gamma'_\rho\eta_1 + \delta'_\rho\eta_2,$$

les périodes normales de J_2. Les α, β, γ et δ seront des entiers.

On devra avoir

$$\Sigma(x_i y'_i - y_i x'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, \rho)$$

et par conséquent

(1) $$A\xi_1\eta_1 + B\xi_1\eta_2 + C\xi_2\eta_1 + D\xi_2\eta_2 = 0,$$

où

$$A = \Sigma(\alpha_i\gamma'_i - \alpha'_i\gamma_i),$$
$$B = \Sigma(\alpha_i\delta'_i - \alpha'_i\delta_i),$$
$$C = \Sigma(\beta_i\gamma'_i - \beta'_i\gamma_i),$$
$$D = \Sigma(\beta_i\delta'_i - \beta'_i\delta_i),$$

A, B, C et D sont des entiers.

Cela posé de deux choses l'une :

Ou bien l'égalité (1) n'est pas une identité, ou bien elle est une identité, de sorte que $$A = B = C = D = 0.$$

1°. Supposons d'abord qu'elle ne soit pas une identité.

Je dis alors qu'il y aura une infinité d'intégrales de la forme
$$J_1 + \lambda J_2$$
qui seront réductibles aux intégrales elliptiques. En effet pour que $J_1 + \lambda J_2$ soit réductible, il suffit qu'il y ait entre les quatre quantités :
$$\xi_1, \ \xi_2, \ \lambda\eta_1, \ \lambda\eta_2$$
deux relations linéaires et homogènes à coëfficients commensurables que je pourrai écrire :
$$\xi_1 = \lambda (b\eta_1 + c\eta_2),$$
$$\xi_2 = \lambda (b'\eta_1 + c'\eta_2),$$
b, c, b', c' étant commensurables.

L'élimination de λ entre ces deux équations donnera la condition :
$$b'\xi_1\eta_1 + c'\xi_1\eta_2 - b\xi_2\eta_1 - c\xi_2\eta_2 = 0.$$
Cette condition sera satisfaite si l'on pose :
$$b' = \mu A, \ c' = \mu B, \ b = -\mu C, \ c = -\mu D,$$
μ étant un nombre commensurable quelconque.

On aura alors : $$\lambda = -\frac{\xi_1}{\mu (C\eta_1 + D\eta_2)}.$$
Si donc nous posons $$\frac{\xi_1}{C\eta_1 + D\eta_2} = h$$
l'intégrale : $$J_1 + \mu h J_2$$
sera réductible toutes les fois que μ sera commensurable.

On peut toujours supposer que $h = 1$; cas si cela n'était pas, on remplacerait l'intégrale J_2 par l'intégrale hJ_2 qui n'en diffère que par le facteur constant h. On a alors : $$\xi_1 = C\eta_1 + D\eta_2,$$
$$\xi_2 = -(A\eta_1 + B\eta_2).$$

2°. Supposons maintenant que la relation (1) soit une identité. Imaginons que le tableau des périodes ait été réduit comme il a été dit au paragraphe précédent et qu'il s'écrire (en supposant $\rho = 3$ pour fixer les idées).

	1	0	0	ξ_2	$\frac{1}{a}$	0	périodes de l'intégrale J_1,
(2)	0	1	0	$\frac{1}{a}$	G	H	périodes d'une intégrale que j'appelle J'_2,
	0	0	1	0	H	G'	périodes d'une intégrale que j'appelle J'_3,

a étant un entier.

Si donc on pose: $$\xi_1 = \frac{1}{a}$$
on aura:

(3) $$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0;\ \alpha'_1 = a,\ \alpha'_2 = 0,\ \alpha'_3 = 0, \\ &\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0;\ \beta'_1 = 0,\ \beta'_2 = 0,\ \beta'_3 = 0. \end{aligned}$$

Il viendra alors:
$$A = -a\gamma_1 + \gamma'_2;\ B = -a\delta_1 + \delta'_2;\ C = \gamma'_1;\ D = \delta'_1.$$
Pour que la relation (1) soit une identité, on doit donc avoir:
$$\gamma'_1 = \delta'_1 = 0,\ \ \gamma'_2 = a\gamma_1,\ \ \delta'_2 = a\delta_1$$
ce qui entraîne évidemment
$$y'_1 = 0,\quad y'_2 = ay_1.$$

Or si l'intégrale J_2 qui doit être une combinaison linéaire de J_1, J'_2 et J'_3 s'écrit par exemple:
$$J_2 = hJ_1 + kJ'_2 + lJ'_3$$
on aura: $$y'_1 = h,\ \ y_1 = h\xi_2 + \frac{k}{a};\ \ y'_2 = k.$$

Les conditions précédentes équivalent donc à la suivante
$$h = 0.$$
On a donc $$J_2 = kJ'_2 + lJ'_3.$$

Revenons maintenant au cas où la relation (1) n'est pas une identité, mais en supposant que le tableau des périodes ait été ramené à la forme (2) de façon que les α et les β prennent les valeurs (3).

On aura alors une infinité d'intégrales réductibles
$$J_1 + \mu J_2$$
où μ est un nombre commensurable quelconque.

On aura d'ailleurs:
$$\xi_1 = \frac{1}{a} = C\eta_1 + D\eta_2 = \gamma'_1\eta_1 + \delta'_1\eta_2 = y'_1.$$
La première période de l'intégrale $J_1 + \mu J_2$ (dans l'ordre du tableau (2)) est alors:
$$x'_1 + \mu y'_1 = 1 + \frac{\mu}{a}.$$

Nous pouvons donc choisir le nombre commensurable μ, de telle sorte que cette première période soit nulle; il suffit pour cela de poser:
$$\mu = -a.$$
On a alors: $$J_1 - aJ_2 = kJ'_2 + lJ'_3$$
k et l étant des coëfficients numériques convenablement choisis.

Si donc parmi les intégrales abéliennes:

$$hJ_1 + kJ_2' + lJ_3'$$

il y en a une (autre que J_1) qui soit réductible aux intégrales elliptiques, ou bien h sera nul, ou bien il y en aura une infinité d'autres comprises dans la formule générale suivante:

$$\mu h J_1 + kJ_2' + lJ_3'$$

(où μ est un nombre commensurable quelconque) qui seront également réductibles. En particulier:

$$kJ_2' + lJ_3'$$

est une intégrale réductible.

Si donc on désigne par

$$y_1', y_2', y_3'; y \ , y_2, y_3$$

les périodes de cette intégrale

$$kJ_2' + lJ_3'$$

on devra avoir $\qquad y_1' = 0, \; y_2' = ay_1$

ce qui prouve que pour cette intégrale la relation (1) est une identité.

D'où la conséquence suivante:

S'il existe deux intégrales réductibles J_2 et J_1 pour lesquelles la relation (1) ne soit pas une identité, il y en aura une infinité d'autres et parmi celles-là, il y en aura encore une pour laquelle la relation (1) sera une identité.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant:

Si dans un système d'intégrales abéliennes de rang ρ, il y en a $\rho - 1$ linéairement indépendantes qui sont réductibles aux intégrales elliptiques, il y en aura une $\rho^{\text{ème}}$ qui sera également réductible.

En effet ces $\rho - 1$ intégrales abéliennes linéairement indépendantes et réductibles aux intégrales elliptiques, peuvent être regardées comme formant un système de $\rho - 1$ intégrales réductibles au genre $\rho - 1$. Donc d'après le théorème énoncé à la fin du paragraphe précédent, il devra y avoir une $\rho^{\text{ème}}$ intégrale, linéairement indépendante des $\rho - 1$ premières, et qui sera réductible au genre 1.

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que si l'on a $\mu + 1$ intégrales réductibles aux intégrales elliptiques (et que ces $\mu + 1$ intégrales ne soient pas linéairement indépendantes) il y en a une infinité.

Soient en effet:

$$y_1, y_2, \ldots, y_\mu$$

μ intégrales réductibles linéairement indépendantes et:

$$J = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_\mu y_\mu$$

une $\mu+1^{\text{ème}}$ intégrale qui est une combinaison linéaire des μ premières et que je suppose également réductible.

Les périodes de l'une quelconque des μ intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, celles de y_i par exemple, devront être des combinaisons linéaires à coëfficients entiers de deux quantités que j'appelle ξ_i et η_i et qui sont les périodes de l'intégrale elliptique à laquelle peut se réduire y_i.

Il résulte de là que les périodes de

$$J = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_\mu y_\mu$$

seront des combinaisons linéaires à coëfficients entiers des 2μ quantités

$$\alpha_1\xi_1,\ \alpha_2\xi_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu\xi_\mu$$
$$\alpha_1\eta_1,\ \alpha_2\eta_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu\eta_\mu.$$

Pour que cette intégrale J soit réductible aux intégrales elliptiques, il faut et il suffit qu'il y ait entre ces 2μ quantités, $2\mu-2$ relations linéaires homogènes à coëfficients entiers.

Supposons qu'il en soit ainsi, et soient:

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_\mu$$

μ nombres commensurables *quelconques* différents de 0; il y aura alors aussi $2\mu-2$ relations linéaires à coëfficients entiers entre les 2μ quantités:

$$\alpha_1\beta_1\xi_1,\ \alpha_2\beta_2\xi_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu\beta_\mu\xi_\mu$$
$$\alpha_1\beta_1\eta_1,\ \alpha_2\beta_2\eta_2,\ \ldots,\ \alpha_\mu\beta_\mu\eta_\mu$$

et par conséquent l'intégrale:

$$\alpha_1\beta_1 y_1 + \alpha_2\beta_2 y_2 + \ldots + \alpha_\mu\beta_\mu y_\mu$$

sera réductible quels que soient les nombres commensurables $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$.

C. Q. F. D.

Si en particulier il y a plus de ρ intégrales réductibles, il y en aura une infinité.

Et en effet, entre $\rho+1$ intégrales il y a toujours une relation linéaire, puisqu'un système d'intégrales abéliennes de rang ρ ne contient que ρ intégrales linéairement indépendantes.

Dans un mémoire inséré aux Acta Mathematica, Mme. Kowalevski étudie le cas de réduction des intégrales de rang 3 au rang 1, en supposant que le nombre caractéristique de la réduction que nous avons ici appelé b soit égal à 2.

Dans un cas remarquable, elle trouve 4 intégrales réductibles et n'en trouve que 4; il n'y en a que 4 en effet où b soit égal à 2, mais il y en a une infinité pour lesquelles b est supérieur à 2.

Je vais enfin pour terminer ce paragraphe démontrer que tout système d'intégrales abéliennes diffère infiniment peu d'un système réductible.

Voici ce que j'entends par là:

Soit (en supposant $\rho = 4$ pour fixer les idées),

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1.1} & \tau_{2.1} & \tau_{3.1} & \tau_{4.1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tau_{1.2} & \tau_{2.2} & \tau_{3.2} & \tau_{4.2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \tau_{1.3} & \tau_{2.3} & \tau_{3.3} & \tau_{4.3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{1.4} & \tau_{2.4} & \tau_{3.4} & \tau_{4.4} \end{matrix} \qquad (\tau_{ik} = \tau_{ki})$$

le tableau des périodes normales d'un système d'intégrales abéliennes. On n'obtiendra un système d'intégrales abéliennes proprement dites, c'est à dire un système engendré par une courbe algébrique, que s'il y a une certaine relation entre les ρ; car le nombre des modules d'une courbe de rang (4) étant 9, est inférieur à 10, nombre des τ.

Il convient toutefois de s'affranchir de cette difficulté, et pour cela il suffit d'étendre un peu le sens du mot *intégrales abéliennes.*

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cinq fonctions abéliennes (8 fois périodiques) de quatre variables u_1, u_2, u_3 et u_4.

Il y aura entre ces cinq fonctions une relation algébrique:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$

et il est aisé de voir que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des intégrales de différentielles totales dépendant de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. On aura:

$$u_1 = \int \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2 + \psi_3 dx_3 + \psi_4 dx_4,$$

où ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5.

Nous conviendrons d'appeler encore intégrales abéliennes les intégrales de différentielles totales ainsi engendrées.

Alors quels que soient les τ (pourvu qu'ils satisfassent à certaines inégalités et sans qu'ils soient assujettis à aucune égalité) ils pourront être regardés comme les périodes d'un système d'intégrales abéliennes et la difficulté signalée plus haut disparaîtra.

Considérons donc le système suivant de périodes:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0, & \tau_{1.1} + r\varepsilon_{1.1}, & \tau_{2.1} + r\varepsilon_{2.1}, & \tau_{3.1} + r\varepsilon_{3.1}, & \tau_{4.1} + r\varepsilon_{4.1} \\ 0 & 1 & 0 & 0, & \tau_{1.2} + r\varepsilon_{1.2}, & \tau_{2.2} + r\varepsilon_{2.2}, & \tau_{3.2} + r\varepsilon_{3.2}, & \tau_{4.2} + r\varepsilon_{4.2} \\ 0 & 0 & 1 & 0, & \tau_{1.3} + r\varepsilon_{1.3}, & \tau_{2.3} + r\varepsilon_{2.3}, & \tau_{3.3} + r\varepsilon_{3.3}, & \tau_{4.3} + r\varepsilon_{4.3} \\ 0 & 0 & 0 & 1, & \tau_{1.4} + r\varepsilon_{1.4}, & \tau_{2.4} + r\varepsilon_{2.4}, & \tau_{3.4} + r\varepsilon_{3.4}, & \tau_{4.4} + r\varepsilon_{4.4} \end{matrix}$$

Ici r est une quantité positive donnée. Quant aux ε ce sont des quantités satisfaisant bien entendu à la condition:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$$

et que j'assujettis de plus aux inégalités

$$|\varepsilon| < 1.$$

Laissons r constant et faisons varier les ε en leur donnant toutes les valeurs compatibles avec les inégalités précédentes. Nous obtiendrons ainsi une infinité de systèmes d'intégrales abéliennes.

Parmi ces systèmes, il y en aura, *quelque petit que soit* r, une infinité qui contiendront quatre intégrales réductibles au rang 1.

C'est ce que j'entendais en disant que tout système d'intégrales abéliennes est infiniment voisin d'une infinité de systèmes réductibles.

Le résultat que je viens d'énoncer est presque évident. En effet une intégrale sera évidemment réductible au genre 1 si toutes ses périodes sont de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α et β étant commensurables; si en d'autres termes, toutes les périodes sont des nombres complexes commensurables.

Mais parmi les nombres

$$\tau_{ik} + r\varepsilon_{ik}$$

qui satisfont à la condition

$$|\varepsilon_{ik}| < 1$$

il y aura, quelque petit que soit r, une infinité de nombres complexes commensurables.

On peut donc choisir les ε_{ik} d'une infinité de manières et de telle façon que les quatre intégrales normales soient réductibles aux intégrales elliptiques.

Je pourrais ajouter que l'on peut choisir les ε_{ik} de telle sorte qu'il y ait une infinité d'intégrales réductibles, mais je n'ai pas besoin pour mon objet de cette extension du résultat précédent.

§ 3. *Généralisation du Théorème d'Abel.*

Je suis obligé ici de faire une digression et de donner avant d'aller plus loin, une généralisation du théorème d'Abel qui me sera utile dans la suite. Soit:

(1) $$f(x, y) = 0$$

une courbe plane quelconque. Soit $u(x, y)$ une intégrale abélienne de 1ère espèce attachée à cette courbe. Soit c une courbe variable de degré donné m qui coupe la courbe (1) en q points variables:

$$x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots ; x_q, y_q.$$

La somme

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q)$$

sera une constante (quelle que soit la courbe c, pourvu toutefois que son degré m ne change pas).

Tel est le théorème d'Abel que je me propose d'étendre aux surfaces.

Je vais d'abord l'étendre aux courbes gauches.

Soit c une courbe gauche quelconque et x, y, z un point mobile sur cette courbe. Nous pourrons mettre l'équation de cette courbe c sous la forme suivante:

$$f(x, y) = 0, \quad z = \frac{\phi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

f, ϕ et ψ étant des polynomes entiers en x et en y. L'intersection complète des deux surfaces:

$$f = 0, \quad \psi z - \phi = 0,$$

se compose alors de la courbe c et d'un certain nombre de droites parallèles à l'axe des z et qui sont les droites communes aux trois cylindres:

$$f(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0, \quad \phi(x, y) = 0.$$

D'ailleurs toutes les droites communes aux deux premiers de ces cylindres, doivent également appartenir au troisième. Je renverrai pour plus de détails au Mémoire de M. Halphen sur les Courbes gauches algébriques, couronné par l'Académie de Berlin.

Il existera un certain nombre d'intégrales:

$$u(x, y, z) = \int R(x, y, z)\, dx$$

(où R est une fonction rationnelle de x, de y et de z; y et z étant définis en fonctions de x par les équations de la courbe c) qui resteront finies en tous les points de c.

Ce seront les intégrales de 1ère espèce attachées à la courbe c.

Le théorème d'Abel s'applique à ces intégrales. Considérons une surface algébrique d'ordre m qui coupe c en q points:

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_q, y_q, z_q)$$

la somme

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_q, y_q, z_q)$$

restera constante quand on fera varier cette surface, pourvu que m reste constant.

Cela est presque évident et pourrait se démontrer diréctement par le même procédé que le théorème d'Abel relatif aux courbes planes. On peut aussi le déduire aisément de ce théorème:

L'intégrale u peut se mettre sous la forme:

$$\int R\left[x, y, \frac{\phi(x, y)}{\psi(x, y)}\right] dx = \int R_1(x, y)\, dx.$$

R_1 étant rationnel en x et en y. C'est alors une intégrale abélienne attachée à la courbe plane $f = 0$.

Soit maintenant

$$\theta(x, y, z) = z^m + \theta_1(x, y) z^{m-1} + \theta_2(x, y) z^{m-2} + \ldots + \theta_m(x, y) = 0$$

l'équation d'une surface quelconque S d'ordre m.

Si on y remplace z par sa valeur $\frac{\phi}{\psi}$, il vient:

(2) $$\phi^m + \theta_1\psi\phi^{m-1} + \theta_2\psi^2\phi^{m-2} + \ldots + \theta_m\psi^m = 0.$$

Si l'on appelle n et $n+1$ les degrés des deux polynômes ψ et ϕ, l'équation (2) sera l'équation d'une courbe plane de degré $m(n+1)$. Cette courbe plane coupera la courbe $f = 0$ en un certain nombre de points. Parmi les points d'intersection, il y en aura q

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_q, y_q)$$

qui correspondront aux q points communs à la courbe C et à la surface S. Les autres correspondront aux droites communes aux trois cylindres:

$$f = 0,\ \phi = 0,\ \psi = 0$$

la trace de chacune de ces droites sur le plan des xy comptant pour m points d'intersection.

Les points d'intersection de la première sorte sont mobiles, les autres sont fixes. Mais dans l'application du théorème d'Abel aux courbes planes les points d'intersection fixes ne doivent pas intervenir. Nous pouvons donc écrire:

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q) = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Supposons en particulier que la courbe C soit l'intersection complète de deux surfaces algébriques:

$$f(x, y, z) = 0, \quad \phi(x, y, z) = 0$$

de degrés m et n. Il est aisé de former alors les intégrales de 1ère espèce.

Supposons que la courbe C n'ait pas de point singulier, ce qui veut dire que les trois déterminants fonctionnels :

$$\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dy},\ \frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{d\phi}{dz},\ \frac{df}{dx}\frac{d\phi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dx}$$

ne peuvent pas s'annuler à la fois en un point de la courbe.

Je dis que l'intégrale :

$$u=\int\frac{P(x,y,z)\,dx}{\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dy}},$$

où P est un polynôme quelconque de degré $m+n-4$, sera de première espèce.

En effet elle reste finie quand x, y et z deviennent infinis ; elle ne pourrait donc devenir infinie que si le dénominateur

$$\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dy}$$

s'annulait. Mais on a :

$$u=\int\frac{Pdx}{\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dy}}=\int\frac{Pdy}{\frac{df}{dz}\frac{d\phi}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{d\phi}{dz}}=\int\frac{Pdz}{\frac{df}{dx}\frac{d\phi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\phi}{dx}}.$$

L'intégrale u ne pourrait donc devenir infinie que si les trois déterminants fonctionnels s'annulaient à la fois, ce qui n'a pas lieu, par hypothèse.

Donc elle restera toujours finie.

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux surfaces. Soit :

$$f(x,y,z)=0$$

une surface algébrique S.

M. Picard a démontré qu'il n'existe pas pour toutes les surfaces d'intégrales de différentielle exacte de 1[ère] espèce, c'est à dire d'intégrale de la forme :

$$u=\int(Rdx+R_1dy)$$

qui reste toujours finie, où la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, où enfin R et R_1 sont rationnels en x, y et z.

Je dis que dans ce cas le théorème d'Abel est encore applicable.

Voici ce que j'entends par là.

On sait que pour définir une famille de courbes gauches, il ne suffit pas de s'en donner le degré, mais qu'il faut connaître également plusieurs autres nombres caractéristiques. Je renverrai d'ailleurs pour plus de détails au Mémoire cité de

M. Halphen. Quoi qu'il en soit, nous dirons que deux courbes gauches, sans point singulier, appartiennent à la même famille quand tous les nombres définis par M. Halphen seront les mêmes pour les deux courbes. On peut alors passer de l'une à l'autre par variation continue.

Soit alors une courbe gauche C qui varie, mais de façon à appartenir toujours à la même famille. Soient:

$$(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_q, y_q, z_q)$$

ses q points d'intersection avec la surface S. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_q$ les valeurs de l'intégrale u en ces q points. La somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q$$

sera une constante.

Commençons par envisager le cas particulier où la courbe C est l'intersection complète de deux surfaces algébriques d'ordre m et n, et que j'appellerai S_1 et S_2. Alors les q points d'intersection de C et de S seront les q points communs aux trois surfaces:

$$S, S_1, S_2.$$

L'intersection de S et de S_1 est une courbe gauche et l'intégrale u d'après sa définition même, sera une intégrale de 1[ère] espèce attachée à cette courbe gauche. Nous pouvons donc faire varier la surface S_2 sans que la somme:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q$$

varie. Pour la même raison, cette même somme ne variera pas quand on fera varier S_1. Donc quelles que soient les surfaces S_1 et S_2 on aura:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q = k;$$

k étant une constante.

C. Q. F. D.

En particulier, si $m = n = 1$, la courbe C se réduit à une droite, et on a pour toutes les droites de l'espace

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q = k;$$

k étant une constante.

Je dis maintenant que $k = mnk$.

En effet faisons dégénérer la surface S_1 en m plans et la surface S_2 en n plans; la courbe C dégénérera en mn droites. La somme Σu étant égale à k lorsqu'on envisage une droite isolée, devra être égale à mnk quand on envisagera un système de mn droites.

Envisageons maintenant une courbe gauche de degré d qui ne soit pas une intersection complète. Son équation pourra toujours s'écrire :

$$F(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) z - \phi(x, y) = 0.$$

F, ψ et ϕ étant des polynômes dont le degré est respectivement d, n et $n+1$.

Les deux surfaces algébriques

$$F = 0, \quad \psi z - \phi = 0$$

sont de degré d et $n+1$. Leur intersection complète se compose de la courbe C et de nd droites parallèles à l'axe des z. Soient :

$$(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_q, y_q, z_q)$$

les q points d'intersection de C et de S et

$$(x_{q+1}, y_{q+1}, z_{q+1}), \ldots, (x_p, y_p, z_p)$$

les $p-q$ points d'intersection des nd droites dont je viens de parler et de S.

On aura alors d'après ce que nous venons de voir :

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_p, y_p, z_p) = (n+1) dk.$$

D'autre part on aura pour les nd droites

$$u(x_{q+1}, y_{q+1}, z_{q+1}) + u(x_{q+2}, y_{q+2}, z_{q+2}) + \ldots + u(x_p, y_p, z_p) = ndk.$$

On a donc :

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_q, y_q, z_q) = dk.$$

C. Q. F. D.

Cela montre en même temps que la somme Σu est la même pour deux courbes de même degré, quand même ces deux courbes n'appartiennent pas à la même famille.

On comprendra, sans que j'insiste d'avantage, que le théorème d'Abel s'applique encore aux intégrales de $1^{\text{ère}}$ espèce de différentielles totales de la forme :

$$\int R_1 dx_1 + R_2 dx_2 + \ldots + R_n dx_n,$$

où les R sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z, et où z est défini par une équation algébrique :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0.$$

Je vais maintenant, quoique cela ne soit pas nécessaire pour mon objet principal, montrer comment et dans quelle mesure le théorème d'Abel peut s'étendre aux surfaces qui n'admettent pas d'intégrale de $1^{\text{ère}}$ espèce.

En ce qui concerne les courbes planes, sans point singulier, ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante:

Soit $f=0$ une courbe algébrique de degré m; soient $\phi=0$, $\phi+\varepsilon\psi=0$ deux autres courbes algébriques de même degré et infiniment peu différentes l'une de l'autre.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_q, y_q) les q points d'intersection de $f=0$, $\phi=0$; soient (x_1+dx_1, y_1+dy_1), ... , (x_q+dx_q, y_q+dy_q) les q points d'intersection de $f=0$, $\phi=\varepsilon\psi=0$. On aura:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{P(x_\nu, y_\nu)\,dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}}.$$

P est un polynôme quelconque d'ordre $m-3$.

De même, en ce qui concerne les courbes gauches, sans point singulier, le théorème d'Abel peut s'énoncer comme il suit:

Nous ne considérerons qu'une courbe gauche, intersection complète de deux surfaces algébriques:

$$f=0, \quad f_1=0,$$

de degrés m et n.

Soient encore $\phi=0$, $\phi+\varepsilon\psi=0$, deux surfaces algébriques infiniment voisines l'une de l'autre. La courbe gauche coupe la surface $\phi=0$ en q points (x_ν, y_ν, z_ν) et la surface $\phi+\varepsilon\psi=0$ en q points $(x_\nu+dx_\nu, y_\nu+dy_\nu, z_\nu+dz_\nu)$ et l'on a:

$$\sum \frac{P(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\,dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}\dfrac{df_1}{dz_\nu}-\dfrac{df_1}{dy_\nu}\dfrac{df}{dz_\nu}}=0.$$

P étant un polynôme quelconque de degré $m+n-4$.

Passons maintenant aux surfaces; soit $f=0$ une surface algébrique d'ordre m. Considérons son intersection avec une courbe gauche variable, intersection complète de deux surfaces $\phi=0$, $\phi_1=0$ d'ordres n et p. La surface $f=0$ coupera une de ces courbes gauches C en q points (x_ν, y_ν, z_ν) et une courbe gauche C', infiniment voisine de C en q points $(x_\nu+dx_\nu, y_\nu+dy_\nu, z_\nu+dz_\nu)$.

Soient $\phi=0$, $\phi_1=0$ les équations de la courbe C et $\phi+\varepsilon\psi=0$, $\phi_1+\varepsilon\psi_1=0$ les équations de C', ε étant infiniment petit.

Nous envisagerons la courbe C'' qui a pour équations

$$\phi+\varepsilon\psi=0, \quad \phi_1=0$$

et nous appellerons

$$(x_\nu + \delta x_\nu,\ y_\nu + \delta y_\nu,\ z_\nu + \delta z_\nu)$$

ses q points d'intersection avec la surface $f = 0$. Nous poserons ensuite:

$$dx_\nu = \delta x_\nu + \partial x_\nu,\quad dy_\nu = \delta y_\nu + \partial y_\nu,\quad dz_\nu = \delta z_\nu + \partial z_\nu.$$

Les deux courbes C et C''' étant sur la même surface $\phi_1 = 0$, on aura:

$$\frac{d\phi_1}{dx_\nu}\delta x_\nu + \frac{d\phi_1}{dy_\nu}\delta y_\nu + \frac{d\phi_1}{dz_\nu}\delta z_\nu = 0.$$

De même les deux courbes C''' et C' étant sur la même surface $\phi + \varepsilon\psi = 0$, on peut, en négligeant ε, écrire:

$$\frac{d\phi}{dx_\nu}\partial x_\nu + \frac{d\phi}{dy_\nu}\partial y_\nu + \frac{d\phi}{dz_\nu}\partial z_\nu = 0. \tag{2}$$

Appliquons le théorème d'Abel à l'intersection de la courbe gauche $f = 0$, $\phi_1 = 0$, avec les deux surfaces infiniment voisines $\phi = 0$, $\phi + \varepsilon\psi = 0$. Il viendra:

$$\sum \frac{P_\nu \delta x_\nu}{\dfrac{\partial(f, \phi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}} = 0.$$

Dans cette équation P_ν désigne un polynôme de degré $m + p - 4$, où x, y, z ont été remplacés par x_ν, y_ν, z_ν et $\dfrac{\partial(f, \phi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}$ représente suivant l'usage le déterminant fonctionnel de f et de ϕ_1 par rapport à y_ν et à z_ν.

Mais on a identiquement:

$$\frac{\delta x_\nu}{\dfrac{\partial(f, \phi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}} = \frac{\delta y_\nu}{\dfrac{\partial(f, \phi_1)}{\partial(z_\nu, x_\nu)}} = \frac{\delta z_\nu}{\dfrac{\partial(f, \phi_1)}{\partial(x_\nu, y_\nu)}} = \frac{\dfrac{d\phi}{dx_\nu}\delta x_\nu + \dfrac{d\phi}{dy_\nu}\delta y_\nu + \dfrac{d\phi}{dz_\nu}\delta z_\nu}{\dfrac{\partial(f, \phi, \phi_1)}{\partial(x_\nu, y_\nu, z_\nu)}}.$$

Je désignerai pour abréger par Δ_ν le dénominateur de la dernière de ces fractions.

On aura alors:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\delta x_\nu + \frac{d\phi}{dy_\nu}\delta y_\nu + \frac{d\phi}{dz_\nu}\delta z_\nu\right) = 0.$$

Mais on a de même, à cause de (2):

$$\sum \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\partial x_\nu + \frac{d\phi}{dy_\nu}\partial y_\nu + \frac{d\phi}{dz_\nu}\partial z_\nu\right) = 0.$$

Il vient donc:

$$\sum \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\phi}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d\phi}{dy_\nu}dy_\nu + \frac{d\phi}{dz_\nu}dz_\nu\right) = 0;$$

c'est la généralisation du théorème d'Abel.

On trouve de même:

$$\sum \frac{Q_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\phi_1}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d\phi_1}{dy_\nu}dy_\nu + \frac{d\phi_1}{dz_\nu}dz_\nu\right) = 0.$$

Q_ν étant un polynôme de degré $m + n - 4$.

Un cas particulier intéressant est celui où la surface $f = 0$ se réduit à un plan; si $\phi = 0$, $\phi_1 = 0$ sont deux courbes planes de degré m se coupant en m^2 points (x_ν, y_ν) et si deux courbes de degré m infiniment voisines se coupent en m^2 points $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu)$, on aura:

$$\sum \frac{P(x_\nu, y_\nu)\left[\frac{d(\phi+\lambda\phi_1)}{dx_\nu}dx_\nu + \frac{d(\phi+\lambda\phi_1)}{dy_\nu}dy_\nu\right]}{\frac{d\phi}{dx_\nu}\frac{d\phi_1}{dy_\nu} - \frac{d\phi_1}{dx_\nu}\frac{d\phi}{dy_\nu}} = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré $m - 3$ et λ étant une constante quelconque.

§ 4. *Fonctions intermédiaires.*

Envisageons un système de fonctions abéliennes à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et à $2n$ périodes. A l'exemple de MM. Briot et Bouquet, j'appellerai fonction intermédiaire toute fonction entière des n variables qui se reproduit multipliée par une exponentielle quand les n variables augmentent d'une période.

Soit par exemple: $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ une période. Une fonction entière Φ sera une fonction intermédiaire si l'on a:

$$\Phi(x_1 + a_{1k}, x_2 + a_{2k}, \ldots, x_n + a_{nk}) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{\alpha_{1k}x_1 + \alpha_{2k}x_2 + \cdots + \alpha_{nk}x_n + \gamma_k}$$

(les α et les γ étant des constantes) et cela pour toutes les périodes.

Je vais supposer pour fixer les idées qu'il n'y a que deux variables x et y; j'appellerai les périodes fondamentales

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{matrix}$$

et les multiplicateurs correspondants seront:

$$e^{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1},\quad e^{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2},\quad e^{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3},\quad e^{\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4}.$$

Si l'on augmente x et y d'abord de la période (a_1, b_1) puis de la période (a_2, b_2), les deux multiplicateurs successifs ont pour exposants d'abord

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) \text{ puis } (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 + \alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2).$$

Le résultat devant être le même dans les deux cas, le nombre :

$$\alpha_2 a_1 + \beta_2 b_1 - \alpha_1 a_2 - \beta_1 b_2 = M_{1.2}$$

devra être égal à un entier multiplié par $2i\pi$. Il en sera de même des expressions analogues M_{ik} où les indices i et k ou des valeurs quelconques.

Considérons en particulier une exponentielle de la forme suivante :

$$e^P \text{ où } P = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Si l'on augmente x et y de a et de b, l'exponentielle se trouvera multipliée par :

$$e^{\alpha x + \beta y + \gamma}$$

où
$$\alpha = 2Aa + 2Bb,$$
$$\beta = 2Ba + 2Cb,$$
$$\gamma = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb.$$

Il vient donc :

$$\frac{1}{2} M_{ik} = (Aa_i + Bb_i)\,a_k + (Ba_i + Cb_i)\,b_k - (Aa_k + Bb_k)\,a_i - (Ba_k + Cb_k)\,b_i = 0.$$

Ainsi pour une exponentielle e^P, tous les M_{ik} sont nuls. Il est aisé de voir que ces exponentielles sont les seules fonctions intermédiaires qui jouissent de cette propriété. Car si une autre fonction intermédiaire Φ en jouissait, on pourrait trouver une exponentielle e^{-P} telle que la fonction Φe^{-P}, qui est également intermédiaire, eût tous ses multiplicateurs égaux à 1. Il en résulterait que cette fonction Φe^{-P} qui est *entière* serait quadruplement périodique ; elle se réduirait donc à une constante, de sorte qu'on devrait avoir :

$$\Phi = Ce^P.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que les périodes :

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{matrix}$$

que nous considérons soient des périodes normales, de sorte que l'on ait :

(1) $$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Posons :

$$\begin{matrix} a'_1 = a_3 & a'_3 = -a_1 & a'_2 = a_4 & a'_4 = -a_2 \\ b'_1 = b_3 & b'_3 = -b_1 & b'_2 = b_4 & b'_4 = -b_2. \end{matrix}$$

On aura alors : $$\Sigma a_i a'_i = \Sigma a_i b'_i = 0.$$

Je dis maintenant qu'on a:

(2) $$\Sigma_{ik} M_{ik} (a'_i b'_k - a'_k b'_i) = 0,$$

la somme étant étendue aux 6 combinaisons possibles des nombres i et k.

En effet cela peut s'écrire:

$$\Sigma_{ik} M_{ik} a'_i b'_k = 0,$$

où cette fois on donnera à i et à k, indépendamment l'un de l'autre les valeurs 1, 2, 3, 4; cela fera donc en tout 16 termes dont 4 seront nuls parce que $M_{ii} = 0$.

La relation précédente devient alors:

$$\Sigma_{ik} (\alpha_i a_k + \beta_i b_k - \alpha_k a_i - \beta_k b_i)\, a'_i b'_k = 0$$

ou bien

$$\Sigma_i (\alpha_i a'_i \Sigma_k a_k b'_k) + \Sigma_i (\beta_i b_i \Sigma_k b_k b'_k) - \Sigma_k (\alpha_k b'_k \Sigma_i a_i a'_i) - \Sigma_k (\beta_k \beta'_k \Sigma_i b_i a'_i) = 0.$$

La relation est donc vérifiée, puisqu'on a:

$$\Sigma_k a_k b'_k = \Sigma_k b_k b'_k = \Sigma_i a_i a'_i = \Sigma_i b_i a'_i = 0.$$

Cela posé, de deux choses l'une, ou bien les relations (1) et (2) sont distinctes, où elles ne le sont pas.

Je ne veux pas démontrer ici que ces relations ne seront jamais distinctes à moins que les intégrales abéliennes considérées ne soient réductibles aux intégrales elliptiques. La démonstration serait sans doute fort longue.

Laissons de côté ce cas exceptionnel et supposons que les deux relations ne sont pas distinctes, et par conséquent que les M_{ik} sont nuls, à l'exception de $M_{1.3}$ et de $M_{2.4}$ qui sont égaux entre eux.

$$M_{1.3} = M_{2.4} = 2mi\pi.$$

Le nombre m devra toujours être de même signe; il sera positif si comme on le suppose d'ordinaire, on a:

$$a_1^0 a_3^1 - a_1^1 a_3^0 + a_2^0 a_4^1 - a_2^1 a_4^0 > 0$$

en désignant par a_i^0 et a_i^1 les parties réelle et imaginaire de a_i.

Nous dirons alors que la fonction intermédiaire envisagée est d'ordre m.

La fonction intermédiaire sera une fonction Θ d'ordre m si les quatre multiplicateurs sont:

$$1,\ 1,\ e^{mx+\gamma_3},\ e^{my+\gamma_4},$$

les huit périodes étant:

pour x: $\quad 2i\pi \quad 0 \quad G \quad H,$

pour y: $\quad 0 \quad 2i\pi \quad H \quad G'.$

Il est aisé de voir:

1°. Que toute fonction intermédiaire peut être regardée comme le produit d'une fonction Θ et d'une exponentielle de la forme e^P.

2°. Que toutes les fonctions Θ d'ordre m qui ont mêmes multiplicateurs sont des fonctions linéaires de m^2 d'entre elles.

Il en résulte que toutes les fonctions linéaires qui ont mêmes multiplicateurs sont des fonctions linéaires de m^2 d'entre elles.

Cela posé, on peut définir le multiplicateur correspondant à une période quelconque $(a_y b)$ en se donnant les trois nombres (α, β, γ).

Si par exemple on a:

$$\Phi(x+a, y+b) = \Phi(x, y)\, e^{\alpha x + \beta y + \gamma}$$

le multiplicateur serait défini par les trois nombres (α, β, γ). Mais il est préférable d'envisager trois autres nombres (α, β, δ) dont le dernier δ est défini comme il suit:

$$\delta = \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta)$$

ou plutôt

$$\delta \equiv \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta) \quad (\text{mod. } 2i\pi).$$

Car on peut évidemment augmenter δ d'un multiple de $2i\pi$ sans changer le multiplicateur.

Soient donc (a, b), (a', b') deux périodes quelconques. Les multiplicateurs seront définis par les deux systèmes de nombres (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ ou bien encore par les deux systèmes de nombres (α, β, δ), $(\alpha', \beta', \delta')$ en posant:

$$\delta = \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta), \quad \delta' = \gamma' - \frac{1}{2}(a'\alpha' + b'\beta').$$

Considérons maintenant la période $(a + a', b + b')$; le multiplicateur correspondant sera défini par les trois nombres $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ou bien encore par les nombres $(\alpha'', \beta'', \delta'')$, on trouve aisément:

$$\alpha'' = \alpha + \alpha', \quad \beta'' = \beta + \beta',$$

$$\gamma'' \equiv \gamma + \gamma' + a'\alpha + b'\beta \equiv \gamma + \gamma' + a\alpha' + b\beta' \quad (\text{mod. } 2i\pi),$$

$$\delta'' \equiv \gamma'' - \frac{1}{2}[\alpha'''(a + a') + \beta''(b + b')] \equiv \delta + \delta' + \frac{1}{2}(a\alpha' + b\beta' - a\alpha' - b\beta').$$

Or d'après ce que nous avons vu:

$$a'\alpha + b'\beta - a\alpha' - b\beta' = 2ki\pi,$$

k étant un entier. On aura donc, selon que l'entier k sera pair ou impair:

$$\delta''' \equiv \delta + \delta'$$

ou

$$\delta''' \equiv \delta + \delta' + i\pi \quad (\text{mod. } 2i\pi).$$

Cherchons donc a déterminer le nombre k.

Supposons que l'on ait :

$$\begin{aligned} a &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4 \\ a' &= \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3 + \eta_4 a_4 \end{aligned} \quad \text{(les } \xi \text{ et les } \eta \text{ étant entiers)},$$

et de même pour b et b'. Il viendra :

$$k = m(\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 + \xi_2\eta_4 - \xi_4\eta_2).$$

Si donc m est pair, on aura toujours :

$$\delta'' \equiv \delta + \delta'.$$

Si au contraire, m est impair, tout dépend de la parité de la parenthèse.

Considérons donc une période quelconque

$$a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4,$$
$$b = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3 + \xi_4 b_4,$$

et proposons nous de trouver le multiplicateur correspondant (α, β, δ). On trouvera aisément :

$$\alpha = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3 + \xi_4 \alpha_4,$$
$$\beta = \xi_1 \beta_1 + \xi_2 \beta_2 + \xi_3 \beta_3 + \xi_4 \beta_4.$$

On aura de plus :

$$\delta \equiv \xi_1 \delta_1 + \xi_2 \delta_2 + \xi_3 \delta_3 + \xi_4 \delta_4 \quad (\text{mod. } 2i\pi),$$

si m est pair ou si

$$\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4$$

est pair.

On aura au contraire :

$$\delta \equiv \xi_1 \delta_1 + \xi_2 \delta_2 + \xi_3 \delta_3 + \xi_4 \delta_4 + i\pi,$$

si m et $\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4$ sont impairs.

Nous allons maintenant introduire six nombres (3):

$$(a, \alpha),\ (a, \beta),\ (a, \delta),\ (b, \alpha),\ (b, \beta),\ (b, \delta)$$

définis comme il suit ; considérons la forme bilinéaire

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_2 y_4 - x_4 y_2$$

et substituons a_1, a_2, a_3, a_4 à la place de x_1, x_2, x_3, x_4 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à la place de y_1, y_2, y_3, y_4 ; nous aurons (a, α) ; de même pour les autres.

Nous poserons de plus

$$(a, \delta) = 2Ri\pi,$$
$$(b, \delta) = 2Si\pi.$$

Nous conviendrons d'écrire :

$$(x', y') \equiv (x, y),$$

lorsque la différence $x' - x$, $y' - y$ sera une période.

Si donc on augmente chacun des δ d'un multiple de $2i\pi$, ce qui ne change pas les multiplicateurs, les nombres R et S deviendront R' et S'; mais on aura:

$$(R', S') \equiv (R, S).$$

Voyons maintenant ce que deviennent nos 6 nombres (3).

1°. Quand on change de variables.

2°. Quand on change de périodes.

3°. Quand on multiplie la fonction intermédiaire par une exponentielle de la forme e^P.

1°. *Changement d'origine.*

Imaginons qu'on pose:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

quels seront les 6 nombres relatifs aux nouvelles variables x', y'?

Il est évident que les 4 nombres

$$(a, \alpha), \ (a, \beta), \ (b, \alpha), \ (b, \beta)$$

ne changeront pas. Quant à R et à S, ils augmenteront respectivement par

$$\frac{1}{2i\pi}\left[h(a, \alpha) + k(a, \beta)\right] \text{ et } \frac{1}{2i\pi}\left[h(b, \alpha) + k(b, \beta)\right].$$

2°. *Changement linéaire.*

Posons:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + \mu y, & \Delta x &= \mu_1 x' - \mu y', \\ y' &= \lambda_1 x + \mu_1 y, & \Delta y &= -\lambda_1 x' + \lambda y', \\ & & \Delta &= \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu. \end{aligned}$$

On aura alors, en appelant a', b', α', β' les nouvelles valeurs de a, b, α, β:

$$\begin{aligned} a' &= \lambda a + \mu b, & \Delta\alpha' &= \mu_1\alpha - \lambda_1\beta, \\ b' &= \lambda_1 a + \mu_1 b, & \Delta\beta' &= -\mu\alpha + \lambda\beta. \end{aligned}$$

Si nous formons alors les nouveaux nombres:

$$(a', \alpha'), \ (a', \beta'), \text{ etc.},$$

il viendra:

$$(a', \alpha') = \frac{\lambda\mu_1}{\Delta}(a, \alpha) + \frac{\mu\mu_1}{\Delta}(b, \alpha) - \frac{\lambda\lambda_1}{\Delta} - \frac{\mu\lambda_1}{\Delta}(b, \beta)$$

et de même pour les trois autres.

Les quatre nouveaux nombres tels que (a', α') s'exprimeront donc linéairement en fonctions des anciens.

Voici le tableau des coëfficients:

	$\frac{(a,\,\alpha)}{\Delta}$	$\frac{(b,\,\alpha)}{\Delta}$	$\frac{(a,\,\beta)}{\Delta}$	$\frac{(b,\,\beta)}{\Delta}$
$(a',\,\alpha')$	$\lambda\mu_1$	$\mu\mu_1$	$-\lambda\lambda_1$	$-\mu\lambda_1$
$(b',\,\alpha')$	$\lambda_1\mu_1$	μ_1^2	$-\lambda_1^2$	$-\lambda_1\mu_1$
$(a',\,\beta')$	$-\lambda\mu$	$-\mu^2$	$+\lambda^2$	$\lambda\mu$
$(b',\,\beta')$	$-\lambda_1\mu$	$-\mu_1\mu$	$\lambda\lambda_1$	$\lambda\mu_1$.

Ce tableau montre immédiatement que:

$$(a,\,\alpha)+(b,\,\beta)$$

est un invariant et il est aisé de voir en effet que cette expression est égale à:

$$M_{1.3}+M_{1.4}=4mi\pi.$$

Mais il y a plus. Supposons que l'on ait

$$(a,\,\alpha)=(b,\,\beta)=2mi\pi$$

et

$$(a,\,\beta)=(b,\,\alpha)=0,$$

le tableau précédent montre qu'on aura encore:

$$(a',\,\alpha')=(b',\,\beta')=2mi\pi$$

et

$$(a',\,\beta')=(b',\,\alpha')=0.$$

Nous allons voir maintenant que les quatre nombres $(a,\,\alpha)$, etc., ont effectivement les valeurs que j'indique plus haut.

Pour une exponentielle de la forme e^P, on voit aisément que ces quatre nombres sont nuls.

Pour une fonction Θ les quatre périodes ont pour valeurs respectivement:

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & G & H \\ 0 & 2i\pi & H & G' \end{matrix}$$

et les nombres α et β ont pour valeurs:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{matrix}$$

Il en résulte que l'on a

$$(a,\,\alpha)=(b,\,\beta)=2mi\pi,$$
$$(a,\,\beta)=(b,\,\alpha)=0.$$

Ces valeurs resteront encore les mêmes quand on multipliera une fonction Θ par une exponentielle e^P; elles ne changeront pas non plus (ainsi que nous venons de le voir) quand on changera de variables. Elles sont donc les mêmes pour une fonction intermédiaire quelconque.

Qu'arrive-t-il maintenant des nombres R et S?

Il est aisé de voir que par suite du changement linéaire que nous envisageons, les γ et les δ ne changent pas. On aura donc, en appelant R' et S' les nouvelles valeurs de R et de S:

$$R' = \lambda R + \mu S,$$
$$S' = \lambda_1 R + \mu_1 S.$$

Revenons au changement de variables que nous avions envisagé d'abord, c'est à dire au changement d'origîne. Nous avons vu que R et S augmentaient respectivement de

$$\frac{1}{2i\pi}[h(a, \alpha) + k(a, \beta)],$$
$$\frac{1}{2i\pi}[h(b, \alpha) + k(b, \beta)].$$

Ces deux quantités, en tenant compte des valeurs des nombres (a, α), etc., se réduisent à: $$mh \text{ et } mk.$$

Si donc on change de variables en posant:

$$x' = \lambda x + \mu y + h,$$
$$y' = \lambda_1 x + \mu_1 y + k,$$

il viendra:

$$R' = \lambda R + \mu S - mh,$$
$$S' = \lambda_1 R + \mu_1 S - mk,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi:

Les nombres $-\frac{R}{m}$ et $\frac{S}{m}$ subissent le même changement que les variables ellesmêmes.

3°. Changement de périodes. Supposons que l'on remplace le système des périodes

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4,$$

que nous supposons être un système de périodes normales, par un autre système équivalent et également formé de périodes normales.

Les nouvelles valeurs des nombres α et β seront formées avec les anciennes, comme les nouvelles périodes avec les anciennes et il en sera encore de même des nouvelles valeurs des nombres δ à un multiple près de $i\pi$.

Il en résulte que les nouvelles valeurs des quatre nombres (a, α), (a, β), (b, α), (b, β) sont les mêmes que les anciennes; et que les nouvelles valeurs de R et de S sont aussi les mêmes que les anciennes à une demi-période près.

C'est cette demi-période qu'il faut maintenant chercher à déterminer.

Pour cela il faut envisager les changements simples de périodes qui sont les suivants:

1°. Permutation de a_1 et de a_3 en changeant le signe d'une des deux périodes.

2°. Changement simultané des signes a_1 et a_3.

3°. Permutation des deux paires de périodes (a_1, a_3), (a_2, a_4).

4°. Changement de a_1 en $a_1 + a_3$.

5°. Changement de a_1 en $a_1 + a_3$ et de a_4 en $a_4 - a_3$.

Les trois premières opérations ne peuvent altérer les nombres R et S. Il n'en est pas de même des deux dernières.

Si l'on change a_1 en $a_1 + a_3$, δ_1 va se changer en $\delta_1 + \delta_3 + \frac{1}{2} M_{1.3}$ ou en $\delta_1 + \delta_3 + mi\pi$. De sorte que le nouveau δ_1 sera congru à $\delta_1 + \delta_3$ ou à $\delta_1 + \delta_3 + i\pi$ selon que m sera pair ou impair. Si on appelle R' et S' les nouvelles valeurs de R et de S, on aura:

$$(R', S') \equiv (R, S),$$

si m est pair, et

$$\left(R', S'\right) \equiv \left(R + \frac{a_3}{2}, S + \frac{b_3}{2}\right),$$

si m est impair.

Dans la 5ème opération, le nouveau δ_1 sera $\delta_1 + \delta_4 + \frac{1}{2} M_{1.4}$ et le nouveau δ_4 sera $\delta_4 - \delta_3 - \frac{1}{2} M_{4.3}$.

Mais comme on a $M_{1.4} = M_{4.3} = 0$, on voit que cette cinquième opération n'altère pas R et S.

Ainsi donc dans le cas où m est pair, on a toujours

$$(R', S') \equiv (R, S)$$

et l'on a dans tous les cas possibles:

$$(2R', 2S') \equiv (2R, 2S).$$

4°. Multiplication par une exponentielle.

Supposons que l'on multiplie la fonction intermédiaire envisagée par l'exponentielle e^P, où

$$P = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Nous avons trouvé pour l'exponentielle:

$$\alpha = 2Aa + 2Bb,$$
$$\beta = 2Ba + 2Cb,$$
$$\gamma = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb,$$

et par conséquent $$\delta = 2Da + 2Eb,$$
ce qui montre que les 6 nombres (a, α), (a, β), (a, δ), etc., sont tous nuls.

On ne change donc pas ces six nombres en multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle.

On voit donc dans quelle mesure nos six nombres peuvent être regardés comme des invariants.

Ces résultats se généralisent immédiatement et s'étendent au cas des fonctions abéliennes de plus de deux variables, mais il est tout à fait inutile que j'insiste sur ce point.

§ 5. *Transformation.*

Soit:

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, \end{matrix}$$

un système de périodes normales, tel que:

$$a_1,\ b_3 - a_3,\ b_1 + a_2,\ b_4 - a_4,\ b_2 = 0\,.$$

Envisageons maintenant un second système de périodes:

$$(2)\qquad \begin{matrix} c_1, & c_2, & c_3, & c_4, \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4, \end{matrix}$$

qu'on obtiendra en posant:

$$\begin{matrix} c_i = \Sigma\lambda_{ik}a_k \\ d_i = \Sigma\lambda_{ik}b_k \end{matrix} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

les λ_{ik} étant des nombres entiers.

Nous supposerons que ces nombres entiers λ aient été choisis de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$c_1d_3 - c_3d_1 + c_2d_4 - c_4d_2 = \mu\,(a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_4 - a_4b_2).$$

Le déterminant des λ sera alors égal à μ^2 et l'opération par laquelle on passe du système des périodes (1) au système (2) s'appellera une transformation d'ordre μ.

Il est évident que toute fonction qui admettra le système de périodes (1), admettra également le système (2), d'où il suit que les fonctions abéliennes engendrées par le système (1) ne sont que des cas particuliers de celles qui sont engendrées par le système (2).

Si l'on considère une fonction intermédiaire relative au système (1), ce sera aussi une fonction intermédiaire par rapport au système (2), mais la réciproque

n'est pas vraie. Une fonction intermédiaire relative au système (2) n'est pas toujours une fonction intermédiaire par rapport au système (1).

Soit $$e^{a_i x + \beta_i y + \gamma_i}$$
le multiplicateur d'une fonction intermédiaire relative au système (1) par rapport à la période (a_i, b_i) et $$e^{a'_i x + \beta'_i y + \gamma'_i}$$
son multiplicateur par rapport à la période (c_i, d_i).

Nous poserons comme dans le paragraphe précédent:

$$\delta_i = \gamma_i - \frac{1}{2}(a_i\alpha_i + b_i\beta_i);\ \delta'_i = \gamma'_i - \frac{1}{2}(c_i\alpha'_i + d_i\beta'_i),$$

et il viendra

$$\alpha'_i = \Sigma\lambda_{ik}\alpha_k,\ \beta'_i = -\Sigma\lambda_{ik}\beta_k, \tag{3}$$

$$\delta \equiv \Sigma\lambda_{ik}\delta_k \quad (\text{mod. } i\pi). \tag{4}$$

Il en résulte que si l'on forme les six nombres:

$$(c, \alpha'),\ (c, \beta'),\ (c, \delta'),\ (d, \alpha'),\ \text{etc.};$$

on aura: $$(c, \alpha') = \mu(a, \alpha),\ (c, \beta') = \mu(a, \beta),\ \text{etc.}$$

On en conclut que si une fonction intermédiaire est d'ordre m par rapport au système (1), elle sera d'ordre $m\mu$ par rapport au système (2).

Posons maintenant:

$$R_1 = \frac{1}{2i\pi}(c, \delta'),\ S_1 = \frac{1}{2i\pi}(d, \delta');$$

on trouvera: $$(2R_1, 2S_1) \equiv (2\mu R, 2\mu S);$$

c'est à dire que les nombres R_1, S_1 ne différeront des nombres μR, μS que d'une demi-période du système (2).

Cela posé, imaginons qu'on se donne les α', les β' et les δ' et qu'on se propose de déterminer les α, les β et les δ. Les α et les β se calculeront sans ambiguité par le moyen des équations (3). Pour déterminer les δ, il faut mettre les congruences (4) sous une forme plus précise.

Nous les écrirons:

$$\delta'_i \equiv \Sigma\lambda_{ik}\delta_k + \varepsilon_i \quad (\text{mod. } 2i\pi) \tag{4}$$

ε_i ne dépendra que des λ_{ik} et sera égal tantôt à 0, tantôt à $i\pi$ (cf. §§ précédent).

Nous n'avons besoin de connaître les δ qu'à un multiple près de $2i\pi$. Il est aisé de conclure que les congruences (4) comportent un nombre de solutions égal au déterminant des λ, c'est à dire à μ^2.

Je vais maintenant résoudre deux problèmes inverses.

1°. Former les fonctions intermédiaires du système (2) à l'aide de celles du système (1).

Nous nous donnons les nombres α', β' et δ' correspondant à un système de fonctions intermédiaires d'ordre μ, relatives au système (2).

Des égalités et congruences (3) et (4) nous déduirons μ^2 systèmes de valeurs des nombres α, β et δ.

A chacun de ces systèmes de valeurs, correspondront m^2 fonctions intermédiaires d'ordre m relatives au système (1).

Par rapport au système (2), ces fonctions intermédiaires seront d'ordre $m\mu$ et correspondront aux nombres donnés α', β', δ'.

On aura donc en tout $m^2\mu^2$ pareilles fonctions d'ordre $m\mu$ qui seront linéairement indépendantes et à l'aide desquelles toutes les autres pourront par conséquent s'exprimer linéairement.

2°. Former les fonctions intermédiaires du système (1) à l'aide de celles du système (2).

Nous nous proposons de trouver une fonction d'ordre m admettant pour chacune des périodes du système (1) un multiplicateur défini par trois nombres donnés (α, β, δ).

Pour les périodes du système (2), le multiplicateur sera défini par les trois nombres (α', β', δ') que l'on peut déduire des relations (3) et (4).

Toute combinaison des périodes (2) est aussi une combinaison des périodes (1); mais la réciproque n'est pas vraie. Parmi les combinaisons des périodes (1), on peut en choisir μ^2 que j'appellerai périodes principales et qui jouiront de la propriété suivante :

Une période quelconque, je veux dire une combinaison quelconque des périodes (1), est toujours égale à une période principale, augmentée d'une combinaison des périodes (2).

Soient alors :

$$(0,\,0),\ (a_1'',\,b_1''),\ (a_2'',\,b_2''),\ \ldots\ldots,\ (a_\nu'',\,b_\nu''),$$

les μ^2 périodes principales ($\nu = \mu^2 - 1$) et

$$(0,\,0,\,0),\ (\alpha_1'',\,\beta_1'',\,\delta_1''),\ (\alpha_2'',\,\beta_2'',\,\delta_2''),\ \ldots\ldots,\ (\alpha_\nu'',\,\beta_\nu'',\,\delta_\nu''),$$

les nombres qui définissent les multiplicateurs correspondants.

Quant aux multiplicateurs eux-mêmes, nous les appellerons pour abréger :

$$1,\quad P_1,\quad P_2,\ \ldots\ldots,\ P_\nu.$$

Cela posé, soit $\Phi\,(x,\,y)$ une fonction intermédiaire d'ordre $m\mu$ par rapport au système (2) et admettant pour les périodes de ce système les mêmes multiplicateurs (α', β', δ') que la fonction qu'il s'agit de construire.

Les fonctions suivantes :

$$P_1\Phi(x-a_1'', y-b_1''),\ P_2\Phi(x-a_2'', y-b_2''),\ \ldots,\ P_\nu\Phi(x-a_\nu'', y-b_\nu''),$$

admettront les mêmes multiplicateurs que la fonction Φ elle-même. Il est aisé de voir alors que la fonction :

$$\Phi(x, y)+\sum_{i=1}^{\nu} P_i\Phi(x-a_i'', y-b_i''),$$

est une fonction intermédiaire d'ordre m par rapport au système (1) et admettant les multiplicateurs (α, β, δ).

Le problème proposé est donc résolu.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas où les intégrales abéliennes qui ont donné naissance au système de fonctions abéliennes envisagées, sont susceptibles d'être ramenées aux intégrales elliptiques.

Supposons pour fixer les idées qu'il n'y ait que trois variables x, y et z et écrivons le tableau des périodes sous la forme suivante :

pour x:	1	0	0	G	H''	H',
pour y:	0	1	0	H''	G'	H,
pour z:	0	0	1	H'	H	G''.

La variable $\alpha x+\beta y+\gamma z$ aura alors pour périodes :

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ (\alpha G+\beta H''+\gamma H'),\ (\alpha H''+\beta G'+\gamma H),\ (\alpha H'+\beta H+\gamma G'').$$

Si ces six périodes se réduisent à deux, nous dirons que la variable $\alpha x+\beta y+\gamma z$ est réductible. Les variables réductibles correspondent ainsi aux intégrales abéliennes réductibles aux intégrales elliptiques que nous avons envisagées dans les §§1 et 2.

Supposons qu'il y ait une variable réductible ; je puis toujours par les procédés du §1 ramener le tableau des périodes à la forme :

	pour x:	1	0	0	G	$\frac{1}{a}$	0,
(5)	pour y:	0	1	0	$\frac{1}{a}$	G'	H (a étant un entier),
	pour z:	0	0	1	0	H	G'';

de telle sorte que la variable réductible soit précisement x.

Supposons maintenant qu'il y ait une autre variable réductible ; il y aura certainement une 3ème variable réductible, d'après les conclusions du paragraphe 2, et de plus, ou bien ces variables seront de la forme :

$$\beta y+\gamma z,\quad \beta' y+\gamma' z,$$

ou bien elle sera de la forme générale

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z;$$

mais il y aura une infinité d'autres variables réductibles parmi lesquelles les deux suivantes: $\beta y + \gamma z, \quad \beta' y + \gamma' z,$
ne dépendront que d'y et de z.

Dans tous les cas, s'il y a trois variables réductibles, ou s'il y en a une infinité, l'une de ces variables sera x, et deux autres seront des combinaisons d'y et de z seulement.

Cela posé, reprenons le tableau des périodes (5) et multiplions les 4ème, 5ème et 6ème périodes par a. Cette opération sera une transformation d'ordre a. Le tableau des périodes deviendra ainsi:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & aG & 1 & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 1 & aG' & aH, \\ 0 & 0 & 1 & 0 & aH & aG''. \end{matrix}$$

Retranchons maintenant la 1ère période de la 5ème et la 2ème de la 4ème, le tableau des périodes se simplifiera et deviendra:

pour x:	1	0	0	aG	0	0,
pour y:	0	1	0	0	aG'	aH,
pour z:	0	0	1	0	aH	aG''.

Les périodes de x sont ainsi rendues indépendantes de celles d'y et de z. La 1ère et la 4ème périodes appartiennent à x seulement, les quatre autres périodes à y et à z seulement.

Les deux variables: $\beta y + \gamma z, \quad \beta' y + \gamma' z,$
resteront d'ailleurs réductibles. Il en résulte que si nous envisageons le système de périodes suivant:

pour y:	1	0	aG'	aH,
pour z:	0	1	aH	aG'',

qui n'est plus que de genre (2), le système d'intégrales abéliennes correspondant admettra encore deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

On pourra donc d'après les principes du §1 réduire le tableau des périodes, en prenant pour nouvelles variables:

$$y_1 = \beta y + \gamma z, \quad z_1 = \beta' y + \gamma' z.$$

On trouvera ainsi:

pour y_1:	1	0	G_1'	$\frac{1}{b}$,
pour z_1:	0	1	$\frac{1}{b}$	G_1'' (b étant un entier).

Le tableau complet des périodes sera alors:

pour x:	1	0	0	aG	0	0,
pour y_1:	0	1	0	0	G_1'	$\frac{1}{b}$,
pour z_1:	0	0	1	0	$\frac{1}{b}$	G_1''.

Faisons ensuite l'opération suivante qui est une transformation d'ordre b:

Multiplier les trois dernières périodes par b; puis retrancher la $2^{\text{ème}}$ de la $6^{\text{ème}}$ et la $3^{\text{ème}}$ de la $5^{\text{ème}}$.

Le tableau des périodes devient ainsi:

pour x:	1	0	0	abG	0	0,
pour y_1:	0	1	0	0	bG_1'	0,
pour z_1:	0	0	1	0	0	bG_1''.

On voit que les périodes des trois variables x, y_1 et z_1 sont ainsi rendues indépendantes.

On reconnaît sans peine comment le raisonnement précédent s'étend au cas général et on peut énoncer le résultat suivant:

Si dans un système de variables abéliennes de genre ρ, il y a ρ variables réductibles, on peut par une transformation d'ordre convenable, simplifier le tableau des périodes de manière à rendre indépendantes les périodes des variables définitives.

Nous avons été obligés de faire dans le raisonnement précédent $\rho = 3$ et non $\rho = 2$, parce que la généralisation en partant du cas de $\rho = 2$ aurait pu présenter des difficultés.

Nous allons revenir à l'hypothèse $\rho = 2$ et supposer de nouveau qu'il n'y a que deux variables x et y.

Considérons en particulier le cas où les périodes de x et de y sont indépendantes et où le tableau des périodes s'écrit:

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & G & 0, \\ 0 & 2i\pi & 0 & G'. \end{matrix}$$

Cherchons à former toutes les fonctions Θ d'ordre m qui admettent pour multiplicateurs relativement à nos quatre périodes:

$$1, \ 1, \ e^{mx+\gamma_3}, \ e^{my+\gamma_4}.$$

On pourra former m fonctions Θ elliptiques, dépendant de la variable x, admettant les deux périodes: $2i\pi$ et G

avec les multiplicateurs 1 et $e^{mx+\gamma_3}$.

Soient: $$\Theta_1(x),\ \Theta_2(x),\ \ldots\ldots,\ \Theta_m(x),$$
ces m fonctions.

On pourra de même former m fonctions Θ elliptiques, dépendant de la variable y, admettant les deux périodes:

$$2i\pi \text{ et } G'$$

avec les multiplicateurs $$1 \text{ et } e^{my+\gamma_4}.$$

Soient: $$\Theta'_1(y),\ \Theta'_2(y),\ \ldots\ldots,\ \Theta'_m(y):$$
ces m fonctions.

Les m^2 produits: $$\Theta_i(x)\,\Theta'_k(y) \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m)$$
seront alors des fonctions Θ d'x et d'y, à l'aide desquelles toutes les autres s'exprimeront linéairement.

Une fonction Θ quelconque d'ordre m est alors égale à:

$$\Sigma A_{ik}\Theta_i(x)\,\Theta'_k(y),$$

où les A_{ik} sont des constantes numériques.

Une fonction intermédiaire quelconque sera de la forme:

$$\Sigma A_{ik}e^P\Theta_i(x)\,\Theta'_k(y),$$

où P est un polynôme entier du 2de degré en x et en y.

Supposons maintenant que les périodes de x et de y ne soient plus indépendantes, mais que les deux variables:

$$\alpha x+\beta y,\quad \alpha' x+\beta' y,$$

soient réductibles.

On pourra alors en prenant pour variables nouvelles,

$$x'=\alpha x+\beta y,\quad y'=\alpha' x+\beta' y,$$

et en opérant sur les périodes une transformation d'ordre μ, rendre indépendantes les périodes de x' et de y'.

Les fonctions intermédiaires d'ordre m relatives au premier système de périodes seront des fonctions intermédiaires d'ordre $m\mu$ par rapport au système transformé.

Il en résulte que toute fonction intermédiaire d'ordre m par rapport au premier système pourra se mettre sous la forme:

$$\Sigma A_{ik}e^P\Theta_i(\alpha x+\beta y)\,\Theta'_k(\alpha' x+\beta' y). \tag{6}$$

Les A_{ik} sont des constantes; les indices i et k varient de 1 à $m\mu$; les Θ_i et les Θ'_k sont des fonctions Θ elliptiques d'ordre $m\mu$; P est un polynôme du second degré en x et y.

Une expression de la forme (6) n'est d'ailleurs pas toujours une fonction intermédiaire relative au premier système de périodes.

Il faut pour cela qu'il y ait entre les A_{ik}

$$m^2(\mu^2-1),$$

relations linéaires qu'il est aisé de former.

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas de ρ variables.

§6. *Somme des zéros.*

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots., \Phi_\rho$, ρ fonctions intermédiaires de ρ variables $x_1, x_2, \ldots., x_\rho$ admettant les mêmes périodes et étant respectivement d'ordre $m_1, m_2, \ldots.., m_\rho$. Considérons les solutions communes aux ρ équations simultanées

(1). $$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3, \ldots.., \Phi_\rho = 0.$$

Soit: $$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \ldots.., x_\rho = y_\rho,$$

un système de solutions des équations (1). Soit:

$$a_1, a_2, \ldots.., a_\rho,$$

une des périodes.

Il est clair que

$$x_1 = y_1 + a_1, \quad x_2 = y_2 + a_2, \ldots.., x_\rho = y_\rho + a_\rho,$$

sera un autre système de solutions. Mais nous ne regarderons pas ces deux solutions comme distinctes.

Dans un travail inséré au tome X du Bulletin de la Société Mathématique de France, j'ai déterminé le nombre des solutions distinctes et démontré qu'il est égal à: $$N = \rho!\ m_1 . m_2 . \ldots.. . m_\rho.$$

Soit maintenant:

$$x_i = y_{ik}, \quad (i = 1, 2, \ldots.., \rho;\ k = 1, 2, \ldots.., N),$$

un quelconque de ces N systèmes de solutions.

Je me propose de déterminer la somme de ces solutions, c'est à dire de calculer les ρ quantités:

$$H_1 = \sum_{k=1}^{N} y_{1k}, \quad H_2 = \sum_{k=1}^{N} y_{2k}, \ldots.., H_\rho = \sum_{k=1}^{N} y_{\rho k}.$$

Il est clair que ces quantités H ne pourront être déterminées qu'à un multiple près des périodes. En effet nous ne regardons pas comme distinctes les deux solutions: $$y_{1k}, y_{2k}, \ldots.., y_{\rho k}$$

et $$y_{1k} + a_1, y_{2k} + a_2, \ldots.., y_{\rho k} + a_\rho.$$

Mais si on les remplace l'une par l'autre:

$$H_1, H_2, \ldots.., H_\rho$$

se changeront en:

$$H_1 + a_1, H_2 + a_2, \ldots\ldots, H_\rho + a_\rho.$$

Les H nous seront donc donnés non par une égalité mais par une congruence.

Je vais maintenant montrer que les H ne dépendent que des périodes et des multiplicateurs.

Pour cela nous allons, pour fixer les idées, supposer qu'il n'y a que deux variables x et y.

Nous aurons alors deux fonctions intermédiaires Φ_1 et Φ_2 d'ordre m_1 et m_2 et nous envisagerons les deux equations:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0,$$

qui ont $2m_1m_2$ solutions distinctes.

Soient alors:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, \end{matrix} \tag{2}$$

les périodes et

$$(\alpha_1, \beta_1, \delta_1), \ (\alpha_2, \beta_2, \delta_2), \ (\alpha_3, \beta_3, \delta_3), \ (\alpha_4, \beta_4, \delta_4),$$
$$(\alpha'_1, \beta'_1, \delta'_1), \ (\alpha'_2, \beta'_2, \delta'_2), \ (\alpha'_3, \beta'_3, \delta'_3), \ (\alpha'_4, \beta'_4, \delta'_4),$$

les multiplicateurs de Φ_1 et de Φ_2, en conservant aux lettres α, β et δ la même signification que dans les deux paragraphes précédents.

Je dis que H_1 et H_2 ne dépendront que des a, des b, des α, des β et des δ.

Soient en effet Φ'_1 et Φ'_2 deux fonctions intermédiaires admettant respectivement les mêmes multiplicateurs que Φ_1 et Φ_2. Formons les équations

$$\Phi_1 + \lambda_1\Phi'_1 = \Phi_2 + \lambda_2\Phi'_2 = 0, \tag{3}$$

qui auront $2m_1m_2$ solutions distinctes; faisons la somme (H_1, H_2) de ces $2m_1m_2$ solutions. Je dis que H_1 et H_2 ne dépendent pas des λ.

Soient Φ''_1 une fonction intermédiaire ayant mêmes multiplicateurs que Φ_1 et Φ'_1, et que Φ''_1 une fonction intermédiaire ayant mêmes multiplicateurs que Φ_2 et Φ'_2. Alors les quotients:

$$\frac{\Phi_1 + \lambda_1\Phi'_1}{\Phi''_1} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi_2 + \lambda_2\Phi'_2}{\Phi''_2},$$

seront des fonctions abéliennes.

Soient maintenant X, Y et Z trois fonctions abéliennes quelconques admettant les périodes (2); il y aura entre ces trois fonctions une relation algébrique que j'écris:

$$F(X, Y, Z) = 0, \tag{4}$$

et toute fonction abélienne sera une fonction rationnelle de X, Y et Z.

Il en sera ainsi en particulier des six dérivées partielles:

$$\frac{dX}{dx},\ \frac{dY}{dx},\ \frac{dZ}{dx},\ \frac{dX}{dy},\ \frac{dY}{dy},\ \frac{dZ}{dy},$$

ce qui permet de poser:

$$x = \int (AdX + BdY),$$

$$y = \int (A_1dX + B_1dY).$$

A, B, A_1, B_1 étant des fonctions rationnelles de X, Y et Z.

En d'autres termes, si l'on regarde X, Y et Z comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation (4) représente une surface algébrique et x et y sont des intégrales de différentielles totales de 1ère espèce attachées à cette surface.

De plus je pourrai écrire:

$$\frac{\Phi_1 + \lambda_1\Phi_1'}{\Phi_1''} = \frac{P_1 + \lambda_1 P_1'}{Q_1},\ \frac{\Phi_2 + \lambda_2\Phi_2'}{\Phi_2''} = \frac{P_2 + \lambda_2 P_2'}{Q_2},$$

P_1, P_1', Q_1, P_2, P_2' et Q_2 étant des polynômes entiers en X, Y et Z.

Il en résulte que les équations (3) équivalent aux suivantes:

(3 bis) $$P_1 + \lambda P_1' = P_2 + \lambda_2 P_2' = 0.$$

Ces dernières représentent une courbe gauche algébrique, variable avec les paramètres λ_1 et λ_2.

Pour avoir H_1, il faut envisager les différents points d'intersection de cette courbe et de la surface (4), et faire la somme des différentes valeurs que prend l'intégrale de 1ère espèce x en ces différents points:

Le théorème d'Abel généralisé, nous apprend que cette somme est une constante. Donc H_1 ne dépend pas de λ_1 et de λ_2.

C. Q. F. D.

Cela posé, proposons nous d'évaluer cette somme en fonction des a, des b, des α, des β et des δ.

Commençons par le cas des fonctions elliptiques et imaginons que l'on ait deux périodes: a_1 et a_2

avec les multiplicateurs (α_1, γ_1), (α_2, γ_2), ou encore

$$(\alpha_1, \delta_1),\ (\alpha_2, \delta_2),$$

les nombres α, γ et δ ayant même signification que plus haut.

On trouve aisément que si m est le nombre des zéros de la fonction intermédiaire envisagée et H leur somme, on aura:

$$2mi\pi = \alpha_2 a_1 - \alpha_1 a_2$$

et

$$2Hi\pi = \frac{\alpha_2 a_1^2}{2} + \gamma_2 a_1 - \frac{\alpha_1 a_2^2}{2} - \gamma_1 a_2,$$

ou en tenant compte des relations

$$\gamma = \delta + \frac{1}{2} a\alpha,$$

$$2Hi\pi = \left(\frac{\alpha_2 a_1}{2} - \frac{\alpha_1 a_2}{2}\right)(a_1 + a_2) + \delta_2 a_1 - \delta_1 a_2,$$

ou
$$H = \frac{m}{2}(a_1 + a_2) + \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi}.$$

Si m est pair, on obtient ainsi:

$$H \equiv \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi} \quad (\text{mod. } a_1, a_2),$$

et si m est impair:

$$H \equiv \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi} + \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{mod. } a_1, a_2).$$

Revenons maintenant au cas de deux variables, mais en supposant que les périodes de x et de y soient indépendantes. Soient alors:

pour x: $\qquad a_1, \quad 0, \quad a_3, \quad 0,$

pour y: $\qquad 0, \quad b_2, \quad 0, \quad b_4,$

les 4 périodes et

$$(\alpha_1, \beta_1, \delta_1), (\alpha_2, \beta_2, \delta_2), (\alpha_3, \beta_3, \delta_3), (\alpha_4, \beta_4, \delta_4),$$

les multiplicateurs correspondants. On aura:

$$\alpha_2 a_1 - \beta_1 b_2 = M_{1.2} = 0, \quad \alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3 = M_{1.3} = 2mi\pi,$$
$$\alpha_4 a_1 - \beta_1 b_4 = 0, \qquad \alpha_2 a_3 - \beta_3 b_2 = 0,$$
$$\beta_4 b_2 - \beta_2 b_4 = 2mi\pi, \qquad \beta_3 b_4 - \alpha_4 a_3 = 0,$$

ce qui permet de poser, μ étant une constante convenablement choisie:

$$\alpha_2 = \mu b_2, \ \alpha_4 = \mu b_4, \ \beta_1 = \mu a_1, \ \beta_3 = \mu a_3.$$

Multiplions maintenant notre fonction intermédiaire par:

$$e^{-\mu xy},$$

α_2, α_4, β_1, β_3 s'annuleront et les autres nombres α, β, δ ne changeront pas. Nous ne changerons pas d'ailleurs les zéros de notre fonction intermédiaire.

Nous pouvons donc toujours supposer que l'on a:

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_3 = 0.$$

Soient maintenant Φ et Φ' deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m' ayant respectivement pour multiplicateurs:

$$(\alpha_1, 0, \delta_1), \ (0, \beta_2, \delta_2), \ (\alpha_3, 0, \delta_3), \ (0, \beta_4, \delta_4),$$
$$(\alpha'_1, 0, \delta'_1), \ (0, \beta'_2, \delta'_2), \ (\alpha'_3, 0, \delta'_3), \ (0, \beta'_4, \delta'_4),$$

et envisageons les deux équations:

(5) $$\Phi = \Phi' = 0,$$

qui ont $2mm'$ solutions distinctes.

Il existe m^2 fonctions intermédiaires qui ont mêmes multiplicateurs que Φ, et m'^2 fonctions qui ont mêmes multiplicateurs que Φ'. Mais d'après ce que nous venons de voir, H_1 et H_2 ne dépendent que des multiplicateurs et ne changeront pas si on remplace Φ et Φ' par d'autres fonctions intermédiaires ayant mêmes multiplicateurs.

Parmi les fonctions qui ont mêmes multiplicateurs que Φ, il y en a qui sont de la forme:

$$\Phi_1(x)\,\Phi_2(y);$$

$\Phi_1(x)$ est une fonction intermédiaire elliptique, admettant les périodes a_1, a_3 et les multiplicateurs (α_1, δ_1), (α_3, δ_3).

De même $\Phi_2(y)$ a pour périodes b_2, b_4 et pour multiplicateurs (β_2, δ_2), (β_4, δ_4).

Je pourrai de même remplacer Φ' par le produit:

$$\Phi_1'(x)\,\Phi_2'(y);$$

$\Phi_1'(x)$ aura pour périodes a_1, a_3 et pour multiplicateurs (α_1', δ_1'), (α_3', δ_3') et $\Phi_2'(y)$ aura pour périodes b_2, b_4 et pour multiplicateurs (β_2', δ_2'), (β_4', δ_4').

Nous remplacerons donc les équations (5) par les suivantes:

$$\Phi_1(x)\,\Phi_2(y) = \Phi_1'(x)\,\Phi_2'(y) = 0,$$

ou ce qui revient au même par les suivantes:

(6) $$\Phi_1(x) = \Phi_2'(y) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1'(x) = \Phi_2(y) = 0.$$

Soit h_1, h_2, h_1', h_2' la somme des zéros de Φ_1, Φ_2, Φ_1', Φ_2'.

Je dis qu'on aura
$$H_1 = m'h_1 + mh_1',$$
$$H_2 = m'h_2 + mh_2'.$$

En effet énumérons les $2mm'$ solutions des équations (6).

On les obtiendra:

1°. En combinant les m zéros de Φ_1 avec les m' zéros de Φ_2'.

2°. En combinant les m' zéros de Φ_1' avec les m zéros de Φ_2.

Donc chacun des zéros de Φ_1 paraîtra m' fois et chacun des zéros de Φ_1' paraîtra m fois. C'est pourquoi l'on a:

$$H_1 = m'h_1 + mh_1'.$$

Nous aurons d'autre part :

$$h_1 \equiv \frac{\delta_3 a_1 - \delta_1 a_3}{2i\pi} + m\frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$h'_1 \equiv \frac{\delta'_3 a_1 - \delta'_1 a_3}{2i\pi} + m'\frac{a_1 + a_2}{2},$$

d'où

$$H_1 \equiv \frac{m'}{2i\pi}(\delta_3 a_1 - \delta_1 a_3) + \frac{m}{2i\pi}(\delta'_3 a_1 - \delta'_1 a_3),$$

le terme $2mm'\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ disparaît comme étant un multiple des périodes.

Posons maintenant, en reprenant les notations des paragraphes précédents :

$$(a,\delta) = a_1\delta_3 - a_3\delta_1 + a_2\delta_4 - a_4\delta_2 = a_1\delta_3 - a_3\delta_1 \quad (\text{puisque } a_2 = a_4 = 0),$$

$$(a,\delta) = 2Ri\pi, \qquad (b,\delta) = 2Si\pi,$$

$$(a,\delta') = 2R'i\pi, \qquad (b,\delta') = 2S'i\pi.$$

Il viendra

$$H_1 \equiv m'R + mR',$$

et de même :

$$H_2 \equiv m'S + mS'.$$

Nous pouvons donc écrire plus succinctement et conformément aux notations adoptées plus haut :

(7) $$(H_1, H_2) \equiv (m'R + mR', m'S + mS').$$

Cette formule est démontrée pour deux fonctions intermédiaires quelconques, toutes les fois que les périodes de x et de y sont indépendantes.

Passons maintenant à un cas plus général, et supposons que les périodes de x et de y ne soient plus indépendantes, mais que parmi les variables de la forme $cx + dy$, il y en ait deux qui soient réductibles.

Nous supposerons d'abord que ce soient x et y qui soient réductibles et que les périodes s'écrivent :

(8)
pour x: $a_1, a_2, a_3, a_4,$
pour y : $b_1, b_2, b_3, b_4,$

de telle façon qu'il y ait deux relations linéaires à coëfficients entiers entre a_1, a_2, a_3 et a_4 et de même deux autres relations semblables entre b_1, b_2, b_3 et b_4.

On pourra alors, par une transformation d'ordre μ amener les périodes de x et de y à être indépendantes et remplacer le système des périodes (8) par un nouveau système (9) de périodes indépendantes.

Soient alors Φ et Φ' deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m'.

Envisageons encore les équations :

$$\Phi = \Phi' = 0.$$

Soient R, S et R', S' les nombres R et S relatifs aux deux fonctions Φ et Φ'.

Par rapport au nouveau système de périodes (9), Φ et Φ' seront des fonctions intermédiaires d'ordres $m\mu$ et $m'\mu$ et par rapport à ce nouveau système, leurs nombres caractéristiques seront devenus respectivement R_1, S_1 et R'_1, S'_1.

On aura d'ailleurs (cf. § précédent):

$$(2R_1,\ 2S_1) \equiv (2\mu R,\ 2\mu S),$$
$$(2R'_1,\ 2S'_1) \equiv (2\mu R',\ 2\mu S'),$$

par rapport aux périodes (9) et *a fortiori* par rapport aux périodes (8).

Les équations $$\Phi = \Phi' = 0$$

auront $2mm'$ solutions distinctes par rapport aux périodes (8); la somme des $2mm'$ valeurs de x sera H_1, celle des $2mm'$ valeurs de y sera H_2.

Ces mêmes équations auront $2\mu^2mm'$ solutions distinctes par rapport aux périodes (9); la somme des $2\mu^2mm'$ valeurs de x sera k_1, celle des $2\mu^2mm'$ valeurs de y sera k_2.

On aura d'ailleurs évidemment:

$$(k_1,\ k_2) \equiv (\mu^2H_1,\ \mu^2H_2),$$

la congruence étant prise par rapport aux périodes (8).

Nous pourrons appliquer au calcul de k_1 et de k_2 la formule démontrée précédemment pour le cas où les périodes x et y sont indépendantes, ce qui donne:

$$(k_1,\ k_2) \equiv (\mu m'R_1 + \mu mR'_1,\ \mu m'S_1 + \mu mS'_1),$$

ou

$$(2k_1,\ 2k_2) \equiv (2\mu^2[m'R + mR'],\ 2\mu^2[m'S + mS']),$$

ou enfin

$$(10) \qquad (2\mu^2H_1,\ 2\mu^2H_2) \equiv (2\mu^2[m'R + mR'],\ 2\mu^2[m'S + mS']).$$

Envisageons donc le système des deux quantités:

$$H_1 - m'R - mR',\ H_2 - m'S - mS'.$$

D'après la congruence (10), ces deux quantités devront toujours être égales à une période divisée par $2\mu^2$. Or ces deux quantités sont évidemment des fonctions continues des δ et des δ'. Ce ne peuvent donc être que des constantes, ce qui nous permet d'écrire:

$$(H_1,\ H_2) \equiv (m'R + mR' + \Delta_1,\ m'S + mS' + \Delta_2),$$

Δ_1 et Δ_2 sont des constantes ne dépendant que des périodes a et b, des α et des β, mais indépendantes des δ et des δ'.

Il reste à déterminer ces constantes. Pour cela, j'envisagerai un cas particulier, celui où les δ et les δ' sont tous nuls. Dans ce cas on a:

$$R = R' = S = S' = 0.$$

De plus la fonction $\Phi(x, y)$ aura mêmes multiplicateurs que $\Phi(-x, -y)$ et par conséquent que:

$$\Phi(x, y) + \Phi(-x, -y),$$

qui est une fonction paire.

Cela nous permet de supposer que dans les équations

$$\Phi = \Phi' = 0,$$

Φ et Φ' sont des fonctions paires.

Si alors: $$x = x_0, \quad y = y_0,$$

est une solution de ces équations, il en sera de même de

$$x = -x_0, \quad y = -y_0.$$

Si ces deux solutions sont distinctes, leur somme est nulle; elles entrent toutes deux dans l'expression de H_1 et de H_2 et elles s'y détruisent.

Si elles ne sont pas distinctes, une seule d'entre elles devra entrer dans l'expression de H_1 et de H_2 et ce sera évidemment une demi-période.

Ainsi dans le cas qui nous occupe (H_1, H_2) est toujours une demi-période et comme on a dans ce cas:

$$(H_1, H_2) \equiv (\Delta_1, \Delta_2),$$

on voit que (Δ_1, Δ_2) est aussi une demi-période; on a donc dans le cas général

$$(2H_1, 2H_2) \equiv (2m'R + 2mR', \ 2m'S + 2mS').$$

Cette formule subsiste encore quand on fait un changement linéaire de variables, ou un changement de périodes (cf. § 4).

Cette formule est ainsi établie pour tous les cas où il y a deux variables réductibles; mais il est aisé de l'étendre au cas le plus général.

En effet, d'après un théorème démontré au § 2, tout système de périodes diffère infiniment peu d'un système correspondant à un cas de réductibilité. De plus il est clair que H_1 et H_2 sont des fonctions continues des périodes.

La formule précédente doit donc s'appliquer quelles que soient les périodes.

C'est ainsi que si $f(x)$ et $\Phi(x)$ sont deux fonctions continues de x qui sont égales pour toutes les valeurs commensurables de x, elles seront encore égales pour toutes les valeurs incommensurables. La façon de raisonner est toute pareille dans les deux cas.

Ainsi dans tous les cas la différence

$$(H_1 - m'R - mR', \ H_2 - m'S - mS'),$$

est toujours une demi-période.

Ceci permet d'écrire:

$$(H_1, H_2) \equiv \Big(m'R + mR' + \frac{1}{2}(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \nu_3 a_3 + \nu_4 a_4),$$
$$m'S + mS' + \frac{1}{2}(\nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3 + \nu_4 b_4) \Big),$$

les ν étant des entiers.

Par raison de continuité, les entiers ν devront avoir toujours la même valeur, ou plutôt puisqu'il s'agit, non d'une égalité, mais d'une congruence, ν_1 devra toujours être de même parité; de même pour ν_2, ν_3 et ν_4.

Pour déterminer la parité des nombres ν, il suffit donc d'envisager un cas particulier. Or quand les périodes de x et de y sont indépendantes, nous avons trouvé:

$$(H_1, H_2) \equiv (m'R + mR', \ m'S + mS').$$

Cette formule subsiste donc dans le cas général.

Ainsi, si l'on envisage les deux équations:

$$\Phi(x, y) = \Phi'(x, y) = 0,$$

où Φ et Φ' sont deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m', elles auront $2mm'$ solutions distinctes. La somme des $2mm'$ valeurs de x sera égale à $m'R + mR'$, et celle des $2mm'$ valeurs de y sera égale à $m'S + mS'$ à un multiple près des périodes.

Envisageons en particulier la fonction Θ de Riemann, c'est à dire la fonction Θ du 1er ordre.

Soit donc:

$$\Theta(x, y) = \sum e^{mx + ny - \frac{1}{2}(\lambda m^2 + 2\mu mn + \nu n^2)},$$

ce qui nous donne pour les quantités a, b, α, β, γ, δ les valeurs suivantes:

Valeurs de	a	b	α	β	γ	δ,
	$2i\pi$	0	0	0	0	0,
	0	$2i\pi$	0	0	0	0,
	λ	μ	1	0	$\frac{1}{2}\lambda$	0,
	μ	ν	0	1	$\frac{1}{2}\nu$	0.

On a donc aussi:

$$R = S = 0.$$

Considérons maintenant la fonction :

$$\Theta(x-h,\ y-k).$$

Nous avons vu au §4 que si l'on faisait subir aux variables x et y un certain changement linéaire, les nombres $-\frac{R}{m}$, $-\frac{S}{m}$ subiraient précisément le même changement, d'où il suit que R et S qui avaient pour valeurs 0 pour la fonction :

$$\Theta(x, y),$$

auront pour valeurs h et k pour la fonction :

$$\Theta(x-h,\ y-k).$$

Considérons alors deux équations simultanées :

$$\Theta(x-h,\ y-k)=\Theta(x-h',\ y-k')=0.$$

Ces équations auront deux solutions distinctes. La somme des deux valeurs de x sera $h+h'$, celle des deux valeurs de y sera $k+k'$ à un multiple près des périodes.

Il serait aisé de voir comment ces résultats peuvent s'étendre au cas où il y a plus de deux variables.

Supposons d'abord qu'il y ait trois variables x, y et z et trois fonctions intermédiaires Φ, Φ' et Φ'' d'ordres m, m' et m''.

On formera pour chacune d'elles trois nombres analogues à R et S que j'appellerai R, S, T pour la première, R', S', T' pour la seconde et R'', S'', T'' pour la troisième.

Si l'on appelle H_1 la somme des $6mm'm''$ valeurs de x, H_2 celles des $6mm'm''$ valeurs de y et H_3 celle des $6mm'm''$ valeurs de z qui satisfont aux trois équations :

$$\Phi=\Phi'=\Phi''=0,$$

on aura :

$$(H_1, H_2, H_3)\equiv(2m'm''R+2mm''R'+2mm'R'',\ 2m'm''S+2mm''S'+2mm'S'',\ 2m'm''T+2mm''T'+2mm'T'').$$

Soient en particulier trois fonctions Θ du 1er ordre. Supposons que l'on ait les trois équations :

$$\Theta(x-h,\ y-k,\ z-l)=\Theta(x-h',\ y-k',\ z-l')=\Theta(x-h'',\ y-k'',\ z-l'')=0.$$

Elles auront 6 solutions distinctes. La somme des 6 valeurs de x sera $2(h+h'+h'')$, celle des 6 valeurs de y sera $2(k+k'+k'')$ et celle des 6 valeurs de z sera $2(l+l'+l'')$ à un multiple près des périodes.

Plus généralement. Soit:

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\rho),$$

une fonction Θ *à* ρ *variables. Formons les* ρ *équations:*

(11) $$\Theta(x_1 - h_{1.k}, x_2 - h_{2.k}, \ldots\ldots, x_\rho - h_{\rho.k}) = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots\ldots, \rho).$$

Elles auront $\rho!$ *solutions distinctes.*

Si on néglige les multiples des périodes, la somme des $\rho!$ *valeurs de* x_i *sera:*

$$(\rho - 1)!\ (h_{i.1} + h_{i.2} + \ldots\ldots + h_{i.\rho}).$$

Si les ρ fonctions Θ qui entrent dans les équations (11) sont toutes paires ou impaires, tous les h sont des demi-périodes. La somme des valeurs de x_i sera donc une demi-période si $\rho = 2$ et si par conséquent $(\rho - 1)!$ est impair. Si au contraire $\rho > 2$ et si par conséquent $(\rho - 1)!$ est pair, la somme des valeurs de x_i sera une période entière. Or nous n'avons déterminé cette somme qu'à un multiple près des périodes; on peut donc la regarder comme nulle.

Si donc $\rho > 2$ et si l'on forme ρ équations en annulant ρ des 4^ρ fonctions Θ paires ou impaires, la somme des $\rho!$ solutions distinctes de ces ρ équations sera nulle.

PARIS, le 13 Juin, 1886.